

Code No. **35**

Total No. of Questions : 40 ]

[ Total No. of Printed Pages : 16

**March, 2009**

**MATHEMATICS**

( Kannada and English Versions )

Time : 3 Hours 15 Minutes ]

[ Max. Marks : 100

( Kannada Version )

- ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

**ವಿಭಾಗ - A**

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1.  $7^{30}$  ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2.  $\begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix}$  ಸೌಷ್ಠವ ಮಾತ್ರಕೆ ಆದರೆ,  $x$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಉಪಸಂಕುಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4.  $2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$  ಈ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣದ ದಿಶಾ ಕೊಸೈನ್‌ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ Turn over

5.  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - k = 0$  ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4 ಮೂಲಮಾನಗಳಾದರೆ,  $k$  ಯ ಬೆಲೆ ಏನು ?
6. ಪರವಲಯದ ನಾಭಿ ( 2, 3 ) ಮತ್ತು ಶೃಂಗ ( 4, 3 ) ಆದರೆ, ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7.  $\sin \left[ \frac{1}{2} \cos^{-1} (-1) \right]$  ರ ಬೆಲೆ ಏನು ?
8.  $1, \omega, \omega^2$  ಗಳು ಏಕತೆಯ ಘನಮೂಲಗಳಾದರೆ,  $(1 - \omega + \omega^2)^6$  ರ ಬೆಲೆ ಏನು ?
9.  $x$  ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ  $3^x \sinh x$  ಅನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿ.
10.  $x$  ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ  $\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$  ಅನ್ನು ಸಮಾಕಲಿಸಿ.

### ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 10 × 2 = 20

11.  $a \equiv b \pmod{m}$  ಆಗಿದ್ದು,  $n$  ಎಂಬುದು  $m$  ನ ಒಂದು ಧನ ಭಾಜಕವಾಗಿದ್ದರೆ  $a \equiv b \pmod{n}$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ನೇರವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸದೆ  $\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$  ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13.  $G = \{ 0, 1, 2, 3 \}$  ಮಾಡ್ಯುಲೋ 4 ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ  $\otimes$  ಒಂದು ಸಂಕುಲವೇ ? ಕಾರಣ ಕೊಡಿ.

14.  $x + y = 6$  ,  $x + 2y = 4$  ವೃತ್ತದ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳು ಆಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಮೂಲಮಾನ ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15.  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  ಮತ್ತು  $3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$  ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳ ಸದಿಶಗಳಾದರೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ನಿಯತ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 5 ಮತ್ತು ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 4 ಆಗಿದ್ದರೆ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ( $a > b$ ) ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17.  $\cot^{-1} x + 2 \tan^{-1} x = \frac{5\pi}{6}$  ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

18.  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$  ರ,  $n$  ನ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇನು ?

19.  $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$  ಆದಾಗ  $(\sqrt{1+x^2}) \frac{dy}{dx} - my = 0$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20.  $y = be^{\frac{x}{a}}$  ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ, ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು  $y$  ನಿರ್ದೇಶಕದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21.  $\int_1^e \log_e x \, dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22.  $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{d^2y}{dx^2}$  ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

23. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ,  $a = 495$ ,  $b = 675$  ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು  $495 (x) + 675 (y)$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು  $x, y \in \mathbb{Z}$  ಆದಾಗ  $x$  ಮತ್ತು  $y$  ಗಳು ಅದ್ವಿತೀಯವಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 5

24. ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : 5

$$3x + y + 2z = 3$$

$$2x - 3y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 4$$

25. a) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣದಲ್ಲಿ \* ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು  $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$  ,  $a, b \in \mathbb{R}$  ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದಾಗ, \* ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಹಾಗೂ ಅನನ್ಯತಾಂಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $(G, *)$  ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ  $a$  ಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ  $(a^{-1})^{-1} = a$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

26. a)  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  ಮತ್ತು  $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಸೈನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $\hat{j} + 2\hat{k}$  ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$  ಮತ್ತು  $-\hat{i} + 2\hat{j}$  ಸದಿಶಗಳು, ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗದ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

2 × 5 = 10

27. a)  $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$  ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$  ಈ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು  
ಲಂಬವೃತ್ತಗಳಾಗಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b)  $2x^2 + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$  ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0$  ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರಗಳ  
ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

28. a)  $y^2 - 4y - 10x + 14 = 0$  ಪರವಲಯದ ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಕೊನೆ ಬಿಂದುಗಳ  
ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $x - 2y + k = 0$  ಸರಳರೇಖೆಯು  $x^2 + 2y^2 = 12$  ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ  
ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾದಾಗ  $k$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a)  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$  ಆದಾಗ  $x + y + z - xyz = 0$   
ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 3

b)  $\tan 4\theta = \cot 2\theta$  ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

30. a) ಮೂಲ ತತ್ಪದಿಂದ  $x$  ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ  $\tan x$  ಅನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿ. 3

b)  $y = \tan^{-1} \left[ \frac{2 + 3x^2}{3 - 2x^2} \right]$  ಆದಾಗ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + x^4}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

[ Turn over

31. a)  $y = \cos ( p \sin^{-1} x )$  ಆದಾಗ,  
 $( 1 - x^2 ) y_2 - xy_1 + p^2 y = 0$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3
- b)  $y = x^2 + 7x - 2$  ವಕ್ರರೇಖೆಯು  $y$ -ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2
32. a)  $x$  ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ  $e^{3x} \left( \frac{3 + \tan x}{\cos x} \right)$  ಅನ್ನು ಸಮಾಕಲಿಸಿ. 3
- b)  $4y = x^3$  ಮತ್ತು  $y = 6 - x^2$  ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ( 2, 2 ) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2
33. a)  $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$  ಆದಾಗ,  $x \frac{dy}{dx} = y$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3
- b)  $x$  ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ  $\frac{1}{7 - 6x - x^2}$  ಅನ್ನು ಸಮಾಕಲಿಸಿ. 2
34.  $y^2 = 6x$  ಮತ್ತು  $x^2 = 6y$  ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

### ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 2 × 10 = 20

35. a) ಒಂದು ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿ ಅತಿಪರವಲಯದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಆದರ್ಶ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) 
$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ba & c^2 + a^2 & bc \\ ca & cb & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2$$
 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

36. a)  $\cos \alpha + 2 \cos \beta + 3 \cos \gamma = 0$ ,  $\sin \alpha + 2 \sin \beta + 3 \sin \gamma = 0$  ಆದಾಗ
- i)  $\cos 3\alpha + 8 \cos 3\beta + 27 \cos 3\gamma = 18 \cos (\alpha + \beta + \gamma)$
- ii)  $\sin 3\alpha + 8 \sin 3\beta + 27 \sin 3\gamma = 18 \sin (\alpha + \beta + \gamma)$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6
- b)  $[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4
37. a) ಒಂದು ಗೋಳದ ಗಾತ್ರವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ  $4\pi$  ಘನ ಸೆ.ಮೀ. ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವಾಗ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಗಾತ್ರವು  $288\pi$  c.c. ಆದಾಗ, ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6
- b)  $\sqrt{3} \tan x = \sqrt{2} \sec x - 1$  ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4
38. a)  $\int_0^{\pi/4} \log (1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log 2$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6
- b)  $\tan y \frac{dy}{dx} = \sin (x + y) + \sin (x - y)$  ಈ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

### ವಿಭಾಗ - E

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

1 × 10 = 10

39. a)  $3 - i\sqrt{3}$  ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮುಂದುವರೆದ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4
- b)  $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4
- c)  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$  ವೃತ್ತ ಮತ್ತು  $x - y + 1 = 0$  ರೇಖೆ ಇವುಗಳಿಂದ ಛೇದಿಸಲ್ಪಡುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

[ Turn over

40. a)  $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}} dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

b) ಎಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಚೌಕವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 4

c)  $x$  ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ  $\sec(5x)^0$  ಅನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿ. 2



**( English Version )**

- Instructions :* i) The question paper has *five* **Parts – A, B, C, D** and **E**.  
Answer all the parts.
- ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks,  
**Part – C** carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and  
**Part – E** carries 10 marks.

**PART – A**

Answer *all* the *ten* questions :

10 × 1 = 10

1. Find the least positive remainder when  $7^{30}$  is divided by 5.
2. If  $\begin{bmatrix} 4 & x + 2 \\ 2x - 3 & x + 1 \end{bmatrix}$  is a symmetric matrix, find  $x$ .
3. Define a subgroup.
4. Find the direction cosine of the vector  $2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ .
5. If the radius of the circle  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - k = 0$  is 4 units, then find  $k$ .
6. Find the equation of the parabola if its focus is ( 2, 3 ) and vertex is ( 4, 3 ).
7. Find the value of  $\sin \left[ \frac{1}{2} \cos^{-1} (-1) \right]$ .

[ Turn over

8. If  $1, \omega, \omega^2$  are the cube roots of unity, find the value of  $(1 - \omega + \omega^2)^6$ .
9. Differentiate  $3^x \sinh x$  w.r.t.  $x$ .
10. Integrate  $\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$  w.r.t.  $x$ .

**PART - B**

Answer any *ten* questions :

$10 \times 2 = 20$

11. If  $a \equiv b \pmod{m}$  and  $n$  is a positive divisor of  $m$ , prove that

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

12. Without actual expansion show that 
$$\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Is  $G = \{0, 1, 2, 3\}$ , under  $\otimes$  modulo 4 a group? Give reason.

14. Find the equation of two circles whose diameters are  $x + y = 6$  and  $x + 2y = 4$  and whose radius is 10 units.

15. Find the area of the parallelogram whose diagonals are given by the vectors  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  and  $3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ .

16. Find the eccentricity of the ellipse ( $a > b$ ), if the distance between the directrices is 5 and distance between the foci is 4.

17. Solve  $\cot^{-1} x + 2 \tan^{-1} x = \frac{5\pi}{6}$ .

18. Find the least positive integer  $n$  for which  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ .

19. If  $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ , prove that  $(\sqrt{1+x^2}) \frac{dy}{dx} - my = 0$ .

20. Show that for the curve  $y = be^{\frac{x}{a}}$  the subnormal varies as the square of the ordinate  $y$ .

21. Evaluate  $\int_1^e \log_e x \, dx$ .

22. Find the order and degree of the differential equation

$$\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

### PART - C

I. Answer any *three* questions :

$3 \times 5 = 15$

[ Turn over

23. Find the G.C.D. of  $a = 495$  and  $b = 675$  using Euclid Algorithm.

Express it in the form  $495 ( x ) + 675 ( y )$ . Also show that  $x$  and  $y$

are not unique where  $x, y \in \mathbb{Z}$ . 5

24. Solve the linear equations by matrix method : 5

$$3x + y + 2z = 3$$

$$2x - 3y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 4$$

25. a) On the set of rational numbers, binary operation  $*$  is defined by

$$a * b = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{show that } * \text{ is commutative}$$

and associative. Also find the identity element. 3

b) If  $a$  is an element of the group  $( G, * )$ , then prove that

$$( a^{-1} )^{-1} = a. \quad \text{2}$$

26. a) Find the sine of the angle between the vectors  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

and  $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ . 3

b) Show that the vectors  $\hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$  and  $-\hat{i} + 2\hat{j}$

form the vertices of the vectors of an isosceles triangle. 2

II. Answer any *two* questions :

$2 \times 5 = 10$

27. a) Derive the condition for the two circles

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \text{ to cut orthogonally.} \quad 3$$

- b) Show that the radical axis of the two circles

$$2x^2 + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0 \text{ is perpendicular to the line joining the centres of the circles.} \quad 2$$

28. a) Find the ends of latus rectum and directrix of the parabola

$$y^2 - 4y - 10x + 14 = 0. \quad 3$$

- b) Find the value of  $k$  such that the line  $x - 2y + k = 0$  be a tangent to the ellipse  $x^2 + 2y^2 = 12$ . 2

29. a) If  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ , show that

$$x + y + z - xyz = 0. \quad 3$$

- b) Find the general solution of  $\tan 4\theta = \cot 2\theta$ . 2

III. Answer any *three* of the following questions :

$3 \times 5 = 15$

30. a) Differentiate  $\tan x$  w.r.t.  $x$  from the first principle. 3

b) If  $y = \tan^{-1} \left[ \frac{2 + 3x^2}{3 - 2x^2} \right]$ , prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + x^4}$ . 2

31. a) If  $y = \cos ( p \sin^{-1} x )$ , prove that

[ Turn over

$$(1 - x^2) y_2 - xy_1 + p^2 y = 0. \quad 3$$

- b) Find the equation of the normal to the curve  $y = x^2 + 7x - 2$  at the point where it crosses  $y$ -axis. 2

32. a) Integrate  $e^{3x} \left( \frac{3 + \tan x}{\cos x} \right)$  w.r.t.  $x$ . 3

- b) Find the angle between the curves  $4y = x^3$  and  $y = 6 - x^2$  at  $(2, 2)$ . 2

33. a) If  $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$ , prove that  $x \frac{dy}{dx} = y$ . 3

b) Integrate  $\frac{1}{7 - 6x - x^2}$  w.r.t.  $x$ . 2

34. Find the area between the curves  $y^2 = 6x$  and  $x^2 = 6y$ . 5

### PART - D

Answer any *two* of the following questions :

2 × 10 = 20

35. a) Define hyperbola as a locus and hence derive the equation of the hyperbola in the form  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . 6

b) Show that 
$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ba & c^2 + a^2 & bc \\ ca & cb & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2.$$
 4

36. a) If  $\cos \alpha + 2 \cos \beta + 3 \cos \gamma = 0$ ,  $\sin \alpha + 2 \sin \beta + 3 \sin \gamma = 0$ ,

show that i)  $\cos 3\alpha + 8 \cos 3\beta + 27 \cos 3\gamma = 18 \cos (\alpha + \beta + \gamma)$

ii)  $\sin 3\alpha + 8 \sin 3\beta + 27 \sin 3\gamma = 18 \sin (\alpha + \beta + \gamma).$

6

b) Prove that  $[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  . 4

37. a) The volume of a sphere is increasing at the rate of  $4\pi$  c.c./sec. Find the rate of increase of the radius and its surface area when the volume of the sphere is  $288\pi$  c.c. 6

b) Find the general solution of  $\sqrt{3} \tan x = \sqrt{2} \sec x - 1$ . 4

38. a) Show that  $\int_0^{\pi/4} \log (1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ . 6

- b) Solve the differential equation

$$\tan y \frac{dy}{dx} = \sin (x + y) + \sin (x - y). \quad 4$$

### PART - E

Answer any one of the following questions :

1 × 10 = 10

39. a) Find the cube roots of  $3 - i\sqrt{3}$  and find their continued product. 4
- b) Show that  $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$  . 4

[ Turn over

- c) Find the length of the chord of the circle

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \text{ intercepted by the line } x - y + 1 = 0. \quad 2$$

40. a) Evaluate  $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}} dx.$  4

- b) Show that among all the rectangles of a given perimeter, the square

has maximum area. 4

- c) Differentiate  $\sec(5x)^0$  w.r.t.  $x.$  2
- 
-