સમય : 1 કલાક] **PART–A** JULY-2013 [કુલ ગુણ : 50

(1) વિધેય $f(x)$ ગણ R ના અંતરાલ $[a, b]$ ઘટતું વિધેય હોય તો તેના મહત્તમ તથા ન્યૂનત્તમ મૂલ્યો અનુક્રમે .... છે.

(A) $f(a)$ અને $f(b)$ (B) $f(b)$ અને $f(a)$

(C) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ અને $f(a)$ (D) $f(b)$ અને $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(2) એક શંકુની ઊંચાઈ તેના આધારના વ્યાસ જેટલી છે. તેનું કદ 50 (સે.મી.)^3/સે.મી.ના દરે વધે છે. જો આધારનું ક્ષેત્રફળ 1 $(\text{met})^2$ હોય તો તેની ત્રિજ્યાનો વૃદ્ધિદર .... સે.મી./સેકન્ડ છે.

(A) 0.0025 (B) 0.25

(C) 1 (D) 4

(3) $f(x) = \cos x$ વિધેય માટે $x = \frac{\pi}{6}$ તથા $\Delta x = 0.01$ માટે વિકલ dy નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0.51 (B) –0.051 (C) –0.005 (D) –0.05

(4) $\int e^{\frac{-x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{-2}{\sqrt{5}} e^{-x} \left(\frac{x}{2} + k\right) + c$ હોય તો $k =$ ....

(A) $\pi - \tan^{-1}(2x)$ (B) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(C) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \pi$ (D) $\tan^{-1}(-2)$

(5) $\int e^x \left(\log_e x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \text{..........} + c.$

(A) $e^x\left(\log x + \frac{1}{x^2}\right)$ (B) $e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right)$

(C) $e^x\left(\log x - \frac{1}{x^2}\right)$ (D) $e^x\left(\log x - \frac{1}{x}\right)$

(6) $\int e^x (x^6 + 7x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)\, dx = \text{.............} + c$

(A) $\sum_{i=1}^{7} x^i e^x$ (B) $\sum_{i=1}^{6} x^i e^x$ (C) $\sum_{i=0}^{6} i\, e^x$ (D) $\sum_{i=0}^{6} (x\, e^x)^i$

(7) જો $I_n = \int (\log x)^n\, dx$ $(n \in N)$ હોય તો $I_n + n\,(I_{n-1}) = \text{............}$

(A) $\frac{x}{2} (\log x)^{n-1}$ (B) $\frac{x^2}{2} (\log x)^{n-1}$ (C) $x^{n-1} (\log x^n)$ (D) $x\,(\log x)^n$

(8) જો $\int f(x)\, dx = g(x)$ હોય તો $\int f^{-1}(x)\, dx = \text{.............} + c.$

(A) $f^{-1}(x) - x\, g^{-1}(f(x))$ (B) $x\, g^{-1}(x) + f^{-1}(g(x))$

(C) $x\, f^{-1}(x) - g(f^{-1}(x))$ (D) $x\, f^{-1}(x) - g(x \cdot f^{-1}(x))$

(9) $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{4 + 9x^2}\, dx$ નું મૂલ્ય નીચેના પૈકી .... છે.

(A) $\frac{\pi}{15}$ (B) $\frac{5\pi}{12}$ (C) $\frac{7\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{24}$

(10) જો $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{3 + 4\sin x}\, dx = k \cdot \log\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$ હોય તો $k = \text{.............}$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$

(11) નિયત સંકલિત $\int_0^{2a} f(x)\, dx - \int_0^{a} f(2a - x)\, dx$ નું મૂલ્ય = ...

(A) $\int_0^{a} f(x)\, dx$ (B) $\int_0^{2a} f(x)\, dx$ (C) $\int_0^{a} f(a+x)\, dx$ (D) $\int_0^{2a} f(a+x)\, dx$

(12) જો $f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f(x) = 0$ હોય તો $\int_{\sin\theta}^{\operatorname{cosec}\theta} f(x)\, dx = \text{..............}$

(A) $\sin \pi$ (B) $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

(13) એક વસ્તુના x એકમના વેચાણમાંથી થતી કુલ આવક $R(x) = 10x^2 + 20x + 1500$ દ્વારા મળે છે તો $x = 5$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક Rs. .... થશે.

(A) 90 (B) 120 (C) 80 (D) 110

(14) વક્ર $x^2 = 4y$ ને બિંદુ $P(1, 2)$ માંથી દોરેલ અભિલંબનું સમીકરણ નીચેના પૈકી .... છે.

(A) $x - 2y = 2$ (B) $-x + y = -1$ (C) $x + y = 3$ (D) $2x + y = 4$

(15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{a + b \sin x}{a + b \cos x}\right) dx =$ ....

(A) $\pi(a^2 - b^2)$ (B) $\frac{\pi ab}{4}$ (C) $\pi \log\left(\frac{a}{b}\right)$ (D) 0

(16) $\int_{-5}^{5} (3x^2 - x^{10} \sin x + x^5 \cdot \sqrt{1 + x^2})\, dx =$ ....

(A) 175 (B) 250 (C) 0 (શૂન્ય) (D) 325

(17) વર્તુળ $x^2 + y^2 = \pi^2$ અને વક્ર $y = \sin x$ દ્વારા પ્રથમ ચરણમાંના આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... એકમ છે.

(A) $\frac{1}{8}(\pi^3 - 8)$ (B) $\frac{1}{4}(\pi^3 - 8)$ (C) $\frac{1}{2}(\pi^3 + 8)$ (D) $\frac{1}{3}(3\pi + 2)$

(18) વક્ર $y^2 = 4x$ અને રેખા $x + y = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{14}{3}$ (B) $\frac{16}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{21}{4}$

(19) $\int \frac{x \sin x}{\sqrt{x \cos x - \sin x}}\, dx =$ .... $+ c$.

(A) $-\log|x \cos x - \sin x|$ (B) $-2 \cdot \sqrt{x \cos x - \sin x}$

(C) $\log|x \cos x - \sin x|$ (D) $2 \cdot \sqrt{x \cos x - \sin x}$

(20) વક્ર $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ અને X–અક્ષથી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) 2π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

(21) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}$ વિશિષ્ટ ઉકેલ $x = 5$ તથા $y = 0$ માટે હોય તો $y = 3$ હોય તો $x =$ .... થાય.

(A) $\frac{1}{2}(e^6 + 9)$ (B) $3(e^6 + 1)$ (C) $\frac{1}{2}(e^3 - 1)$ (D) $3(e^{\frac{1}{2}} + 4)$

(22) $xy = a\,e^x + b\,e^{-x}$ એ નીચેના પૈકી .... વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

(A) $y\,y_2 + y_1 + xy = 0$ (B) $y_2 + 2\,yy_1 - xy = 0$

(B) $x\,y_2 + 2y_1 - xy = 0$ (D) $xy_2 + 2\,yy_1 + xy = 0$

(23) R^3 નું સમતલ $\pi : 3x + 4y - 12z = -12$ એ બિંદુઓ $P(1, 1, k)$ તથા $Q(-3, 0, 1)$ થી સમાન અંતરે છે તો $k =$ ....

(A) $\frac{7}{3}$ અથવા $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{5}{2}$ અથવા $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{-7}{3}$ અથવા $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{11}{4}$ અથવા $\frac{22}{9}$

(24) $\vec{OA} = (2, 1, 1)$, $\vec{OB} = (3, -1, 1)$ અને $\vec{OC} = (-1, 1, -1)$ જેની ધાર હોય તેવા સમાંતર ફલકનું ઘનફળ (volume) .... છે.

(A) 7 (B) 4 (C) 11 (D) 9

(25) α, β અને γ કોઈ સદિશ $\bar{r}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ છે તો $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) =$ ....

(A) 1 (B) -2 (C) 0 (D) -1

(26) વિધેય $f(x) = x + x^{-1}$ નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય .... છે. $(x \neq 0)$

(A) -2 (B) 2 (C) 4 (D) -4

(27) સાદા લોલકનો આવર્તકાળ માપવામાં 1% ત્રુટિ આવે છે. તો તેની લંબાઈ માપવામાં .... % ત્રુટિ આવે.

(A) 4 (B) 8 (C) 2 (D) 6

(28) $f(x) = x^x$ એ .... અંતરાલમાં ઘટે છે. $(x \in R^+)$.

(A) $(0, 1)$ (B) $(0, \infty)$ (C) $(0, e)$ (D) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

(29) જો નળાકારની ઊંચાઈ તેની ત્રિજ્યા r જેટલી જ હોય તો તેના કદનો ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ વૃદ્ધિદર .... છે.

(A) $6\pi r^2$ (B) πr^2 (C) $3\pi r^2$ (D) $4\pi r^2$

(30) $\int \left(\frac{2 + \sin 2x}{1 + \cos 2x}\right) e^x \, dx =$ .... $+ c$.

(A) $e^x \tan x$ (B) $e^x \tan 2x$ (C) $e^x \sec^2 x$ (D) $e^x \sec x$

(31) $\int e^x \cdot \cos 2x \, dx =$ .... $+ c$.

(A) $\frac{e^x}{5}(\cos 2x - 2 \sin 2x)$ (B) $\frac{e^x}{5}(2 \cos 2x + 2 \sin 2x)$

(C) $\frac{e^x}{\sqrt{5}}(\cos 2x + 2 \sin 2x)$ (D) $\frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2 \sin 2x)$

(32) $\int_1^e \log x \, dx =$ ....

(A) $1 - \frac{1}{e}$ (B) e (C) 1 (D) $e - 1$

(33) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \, dx =$ ....

(A) $\log_3 3$ (B) $\log_3 1$ (C) $\log(e^2 + 1)$ (D) $\log(e^2 - 1)$

(34) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \text{.............}$.

(A) $\tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\tan^{-1} e$ (D) $\tan^{-1} e + \frac{\pi}{4}$

(35) $\int_1^4 \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^{-1} dx = \text{.............}$

(A) $\log\left(\frac{17}{2}\right)$ (B) $\frac{1}{2} \log\left(\frac{17}{2}\right)$ (C) $2 \log\left(\frac{17}{2}\right)$ (D) $\log 17$

(36) વક્ર $y = 2x - x^2$ અને X–અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 4 (B) $\frac{20}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) 8

(37) વક્ર $y = | x - 5 |$, $y = 0$, $x = 0$ અને $x = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{9}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) 9 (D) 8

(38) વક્ર $y = x \cdot | x |$, $y = 0$, $x = -1$ અને $x = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 0 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

(39) $x \cdot e^{\frac{dy}{dx}} + \frac{dy}{dx} + 2 = 0$ નું પરિમાણ અને કક્ષા અનુક્રમે .... અને .... છે.

(A) 1, 1 (B) અવ્યાખ્યાયિત, 1 (C) 1, અવ્યાખ્યાયિત (D) 1, 0

(40) વિકલ સમીકરણ $(e^x + e^{-x}) \frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y = \log | e^x - e^{-x} | + c$ (B) $y = \log | e^{2x} + 1 | + c$

(C) $y = \log | e^x + e^{-x} | + c$ (D) $y = 2 \log | e^x + e^{-x} | + c$

(41) સમપરિમાણ વિધેય $f(x, y) = \frac{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$ નું પરિમાણ (ઘાત) .... છે.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $-\frac{1}{12}$ (C) અવ્યાખ્યાયિત (D) $-\frac{1}{6}$

(42) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 2}$ નો સાંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) e^y (B) અવ્યાખ્યાયિત (C) e^x (D) e^{-y}

(43) જો $|\bar{x}| = |\bar{y}| = 1$, $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ તો $|\bar{x} \times \bar{y}| =$ ....

(A) 2
(B) 0
(C) 1
(D) આ પૈકી એકપણ નહીં

(44) જો $|\bar{x}| = 2$, $|\bar{y}| = 4$, $|\bar{z}| = 1$ અને $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = \bar{0}$ તો $|\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{z} \cdot \bar{x}|$ $=$ ....

(A) $\dfrac{-21}{2}$
(B) $\dfrac{21}{2}$
(C) $\dfrac{2}{21}$
(D) 21

(45) $\bar{a} \times \{\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})\} =$ ....

(A) $|\bar{a}|^2 (\bar{b} \times \bar{a})$
(B) $|\bar{a}|^2 (\bar{a} \times \bar{b})$
(C) $(\bar{a} \cdot \bar{a})^2 \times (\bar{b} \times \bar{a})$
(D) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{a})$

(46) $\bar{a} = (-3, 5, 7)$ સાથે સમરેખ થાય તેવા એકમ સદિશોની સંખ્યા .... છે.

(A) 2
(B) 1
(C) 0
(D) અનંત

(47) જો $(\bar{x}, \wedge\, \bar{y}) = \theta$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$ તથા $|\bar{x} \cdot \bar{y}| = \cos\theta$, તો $|\bar{x} \times \bar{y}| =$ ....

(A) $\pm \sin\theta$
(B) $\sin\theta$
(C) $-\sin\theta$
(D) 1

(48) રેખા : $\dfrac{3 - x}{3} = \dfrac{2y - 3}{5} = \dfrac{z}{2}$ નું સદિશ સમીકરણ .... છે.

(A) $\bar{r} = (6, 3, 0) + k(-6, 5, 4), k \in R$
(B) $\bar{r} = (3, 3, 0) + k(-6, 5, 4), k \in R$
(C) $\bar{r} = \left(3, \dfrac{3}{2}, 0\right) + k(6, -5, -4), k \in R$
(D) $\bar{r} = \left(3, \dfrac{3}{2}, 0\right) + k(3, 5, 2), k \in R$

(49) ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરનો લંબપાદ (a^2, b^2, c^2) હોય, તો સમતલનું સમીકરણ .... થાય.

(A) $a^2x + b^2y + c^2z = a^2 + b^2 + c^2$
(B) $a^2x + b^2y + c^2z = (abc)^2$
(C) $\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{y}{b^2} + \dfrac{z}{c^2} = 1$
(D) $a^2x + b^2y + c^2z = a^4 + b^4 + c^4$

(50) રેખાઓ $\dfrac{x}{2} = \dfrac{z}{3} = \dfrac{y}{1}$ અને $\dfrac{2 - x}{-2} = \dfrac{y + 1}{-2} = \dfrac{3 - z}{-3}$ એ ....

(A) સંપાતી છે.
(B) પરસ્પર લંબ છે.
(C) સમાંતર છે.
(D) સમાંતર કે સંપાતી નથી.

PART-B

સમય : 2 કલાક] [કુલ ગુણ : 50

સૂચનાઓ :

(1) PART-B માં કુલ ત્રણ વિભાગ છે.

(2) વિભાગ A ના 16, વિભાગ B ના 16, વિભાગ C ના 18 ગુણ છે.

(3) દરેક વિભાગના માગ્યા મુજબ ઉત્તર આપો.

વિભાગ-A

● **માગ્યા મુજબ ગણતરી કરી જવાબ આપો. (દરેક પ્રશ્નના 2 ગુણ છે.)** **16**

(1) ઊંધા શંકુ આકારની પાણીની એક ટાંકી છે. તેના પાયાની ત્રિજ્યા 4 મીટર અને ઊંચાઈ 6 મીટર છે. આ ટાંકીને સફાઈ કરવા માટે 2(મીટર)^3/મિનિટના દરથી ખાલી કરવામાં આવે છે. જ્યારે પાણીની ઊંડાઈ 3 મીટર હોય ત્યારે પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ ઘટવાનો દર મેળવો.

અથવા

(1) $\sec^{-1}(-2 \cdot 01)$ નું આસન્ન મૂલ્ય મેળવો.

(2) સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ = અને $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ સમતલીય છે. તથા તેમનામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

(3) $\int x^2 \cdot 2^x \, dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

(4) વક્રના કોઈ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ તે બિંદુના y યામના વ્યસ્ત જેટલો છે. જો વક્ર બિંદુ $P(-1, 2)$ માંથી પસાર થાય તો તેનું સમીકરણ મેળવો.

(5) $\int \log x \cdot (1 + x)^{-2} \, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

(6) પરવલય $y = x^2 + 1$ અને $y = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અથવા

(6) વક્ર $y = -x^2$ અને $x = -y^2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(7) R^2 માં સદિશ (5, 12) ને લંબ એકમ સદિશો મેળવો.

(8) રેખા $x = 3 - 4z$, $y = 3z + 2$ ની દિક્કોસાઈન શોધો.

વિભાગ-B

● **માગ્યા મુજબ નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો. (દરેક પ્રશ્નના 3 ગુણ છે.)** **16**

(9) સાબિત કરો કે વક્રો $x^2 = y$ અને $x^3 + 6y = 7$ એ બિંદુ (1, 1) આગળ લંબચ્છેદી છે.

(10) $\int x \cdot \sec^2 x \tan x \, dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

અથવા

(10) $\int \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{1 + \cos x} (e^{\frac{-x}{2}}) \, dx$ નું મૂલ્ય મેળવો. $\left(\text{જ્યાં } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(11) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 4) \, dx$ ને સરવાળાના લક્ષ તરીકે દર્શાવો.

(12) $\int_{-1}^{2} |2x - 1|\, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

અથવા

(13) વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો. $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y) + \cos(x + y)$

(14) બિંદુ P(1, 0, 3) માંથી રેખા $\bar{r} = (5, 9, -1) + k(1, 2, -2)$, $k \in R$ પરનો લંબપાદ, લંબ રેખાનું સદિશ સમીકરણ અને લંબની લંબાઈ શોધો.

વિભાગ-C

- **માગ્યા મુજબ ગણતરી કરી જવાબ આપો. (દરેક પ્રશ્નના 4 ગુણ છે.)** **18**

(15) સાબિત કરો : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + 1)$

(16) સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ અને $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ વિષમતલીય છે. તેમની વચ્ચેનું ન્યૂનત્તમ અંતર મેળવો .

(17) $\int \frac{\sin x}{\sin 4x}\, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

(18) 1 લીટર તેલ સમાવતો એક નળાકાર ડબ્બો બનાવવાનો છે. ન્યૂનત્તમ ખર્ચ થાય તે માટે તેની ત્રિજ્યા તથા ઊંચાઈ શોધો.

અથવા

(18) વિધેય $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ કયા અંતરાલમાં વધે છે કે ઘટે છે તે નક્કી કરો.

●●●

PART-A ANSWERS

(1) ઉકેલ : **(A)** વિધેય $f(x)$ ગણ R ના અંતરાલ $[a, b]$ પર ઘટતું વિધેય છે.
હવે અંતરાલની વ્યાખ્યા મુજબ $a < b$ છે.
$\therefore f(a) > f(b)$
$\therefore f(b)$ ન્યૂનત્તમ અને $f(a)$ મહત્તમ થાય.

(2) ઉકેલ : **(A)** ધારો કે શંકુની ઊંચાઈ h અને ત્રિજ્યા r છે. તેમજ તેનું કદ (ઘનફળ) V અને આધારનું ક્ષેત્રફળ A છે. અહીં કોઈ t સમયે $\frac{dV}{dt} = 50$ (સે.મી.)^3/સે.મી. અને $A = 1$ (મી.)^2 આપેલ છે.

આપણે $\frac{dr}{dt}$ મેળવવા છે.

હવે V = શંકુનું ઘનફળ

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 (2r)$$

($\because$ શંકુની ઊંચાઈ આધારના વ્યાસ જેટલી છે.)

$$\therefore V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 2A\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

$$\therefore 50 = 2(10)^4 \frac{dr}{dt}$$

[$\because$ 1 મીટર = 10^4 (સે.મી.)^2]

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{50}{2(10)^4} = \frac{25}{104}$$

$= 0.0025$ સે.મી./સેકન્ડ

(3) ઉકેલ : **(C)** $f(x) = \cos x$
$\therefore f'(x) = -\sin x$

તથા $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = \frac{-1}{2}$

તેમજ $\Delta x = 0.01$

હવે $dy = f'(x)\cdot\Delta x = (-0.05)(0.01)$
$= -0.005$

(4) ઉકેલ : **(B)** $I = \int e^{-x}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$$\therefore a = -1 \text{ અને } b = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx-\alpha) + c$$

જ્યાં $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$

જ્યાં $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$$\therefore I = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-x}\cos\left[\left(\frac{x}{2}-\left(\pi-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right)\right] + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-x}\cos\left(\frac{x}{2}-\pi+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-x}\cos\left[-\left(\pi-\left(\frac{x}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right)\right] + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-x}\cos\left(\pi-\left(\frac{x}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right) + c$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-x}\cos\left(\frac{x}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) + c$$

$$\therefore k = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

(5) ઉકેલ : **(D)** $I = \int e^x\left(\log x + \frac{1}{x^2}\right)dx$

$$\therefore I = \int e^x\left(\log x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \int e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$- \int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$

હવે $f(x) = \log x$ અને $g(x) = \frac{1}{x}$ લેતાં

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x}$ અને $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$

હવે $I = \int e^x (f(x) + f'(x))\, dx$

$- \int e^x (g(x) + g'(x))\, dx$

$= e^x f(x) - e^x g(x) + c$

$= e^x (f(x) - g(x)) + c$

$\therefore I = e^x \left(\log x - \frac{1}{x}\right) + c$

(6) ઉકેલ : **(B)** $z = \int e^x (x^6 + 7x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)\, dx$

$I = \int e^x \{(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) + (6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\} \cdot dx$

$I = \int e^x (f(x) + f'(x)\, dx$

$= e^x f(x) + c$

$= e^x (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) + c$

$= \sum_{i=1}^{6} e^x \cdot (x^i) + c$

(7) ઉકેલ : **(D)** $I_n = \int (\log x)^n\, dx,\ n \in N$

$u = (\log x)^n$ અને $v = 1$ લેતાં

$I_n = u \int v\, dx - \int \left(u' \int v\, dx\right) dx$

$= (\log x)^n \cdot x - \int n (\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x\, dx$

$I_n = x(\log x)^n - n\, I_{(n-1)}$

$\therefore I_{n+n} I_{(n-1)} = x(\log x)^n$

(8) ઉકેલ : **(C)** $I = \int f^1(x)\, dx$

હવે $f^1(x) = t$ મૂકો.

$\therefore x = f'(t)$

$\therefore dx = f'(t)\, dt$

$\therefore I = \int t \cdot f^1(t)\, dt$

$\therefore I = t \int f^1(t) \cdot dt - \int \left(\frac{dt}{dt}\right) f^1(t)\, dt$

$= t\, f(t) - \int f(t)\, dt$

$= t\, f(t) - g(t)$

$= f^{-1}(x) \cdot f(f^{-1}(x)) - g(f^{-1}(x))$

$\therefore I = x\, f^{-1}(x) - g(f^{-1}(x) + c$

(9) ઉકેલ : **(D)** $I = \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{4 + 9x^2}\, dx$

અહીં $\int \frac{1}{a + bx^2}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x\right)$ નો ઉપયોગ કરતાં

$\therefore I = \left\{\frac{1}{\sqrt{4(9)}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{9}{4}}\, x\right)\right\}_0^{\frac{2}{3}}$

$= \left\{\frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\, x\right)\right\}_0^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{6} [\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)]$

$\therefore I = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}$

(10) ઉકેલ : **(D)** $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{3 + 4 \sin x}\, dx$

$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos x}{3 + 4 \sin x}\, dx$

$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$

જ્યાં $f(x) = 3 + 4 \sin x$

$\therefore f'(x) = 4 \cos x$

$\therefore I = \frac{1}{4} [\log | f(x) |]_0^{\frac{\pi}{3}} + c$

$= \frac{1}{4} \log [(3 + 4 \sin x)]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{1}{4}\left[\log\left\{\left(3 + 4\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\} - \log(3 + 4\sin 0\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\log\left(\frac{3 + 4\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$

(11) ઉકેલ : **(A)** $I = \int_0^{2a} f(x)\,dx - \int_0^{a} f(2a-x)\,dx$

અહીં $\int_0^{a} f(2a-x)\,dx$ સંકલિતમાં

$2a - x = t$ મૂકો.

$\therefore dx = -dt$

તથા $x = a$ તો $t = a$

તેમજ $x = 0$ તો $t = 2a$

$$\therefore I = \int_0^{2a} f(x)\,dx - \left(-\int_{2a}^{a} f(t)\,dt\right)$$

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx + \int_{2a}^{a} f(t)\,dt$$

$$\therefore I = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx - \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

($\because$ ત્રિભય સંકલિત ચલ પર આધારિત નથી)

$$\therefore I = \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

(12) ઉકેલ : **(A)** અહીં $f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f(x) = 0$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

હવે $I = \int_{\sin\theta}^{\mathrm{cosec}\,\theta} f(x)\,dx$

$$= \int_{\sin\theta}^{\mathrm{cosec}\,\theta} -\frac{1}{x^2}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

અહીં $\frac{1}{x} = t$ આદેશ લેતાં

$\therefore \frac{-1}{x^2}\,dx = dt$ થાય.

તથા $x = \sin\theta \Rightarrow t = \mathrm{cosec}\,\theta$

અને $x = \mathrm{cosec}\,\theta \Rightarrow t = \sin\theta$

$$\therefore I = \int_{\mathrm{cosec}\,\theta}^{\sin\theta} f(t)\,dt = -\int_{\sin\theta}^{\mathrm{cosec}\,\theta} f(t)\,dt$$

$$\therefore I = \int_{\sin\theta}^{\mathrm{cosec}\,\theta} f(x)\,dx$$

($\because$ નિયત સંકલિત ચલ x પર આધારિત નથી)

$\therefore I = -1$

$2I = 0$

$\therefore I = 0$

$\therefore I = \sin\pi$

(13) ઉકેલ : **(B)** $R(x) = 10x^2 + 20x + 1500$

$\therefore R^1(x) = 20x + 20$

$(R^1(x)_{x=5} = 20(5) + 20 = 120$ Rs.

$\therefore$ સીમાંત આવક Rs. = 120.

(14) ઉકેલ : **(C)** $x^2 = 4y$

$\therefore 2x = 4\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{p(1,\,2)} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ P(1, 2) આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ = 1

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ = -1

$\therefore$ અભિલંબનું સમીકરણ :

$y - y_1 = m(x - x_1)$ મુજબ મળે

જ્યાં $(x_1, y_1) = (1, 2)$ અને $m = -1$ લેતાં

$\therefore y - 2 = -1\ (x - 1)$

$\therefore x + y = 3$ માગેલ અભિલંબ થાય.

(15) ઉકેલ : **(D)** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{a + b \sin x}{a + b \cos x}\right) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ (a + b \sin x)\ dx$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ (a + b \cos x)\ dx$$

પ્રથમ સંકલિતમાં $a = \frac{\pi}{2}$ છે.

$\therefore x$ ને બદલે $a - x$ અર્થાત્ $\frac{\pi}{2} - x$ લેતાં

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx -$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ (a + b \cos x)\ dx$$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ (a + b \cos x)\ dx -$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ (a + b \cos x)\ dx$$

$\therefore I = 0$

(16) ઉકેલ : **(B)** $I = \int_{-5}^{5} 3x^2\ dx -$

$$\int_{-5}^{5} [x^{10} \sin x - x^5 \sqrt{1 + x^2}]\ dx$$

અહીં $f(x) = x^{10} \sin x - x^5 \sqrt{1 + x^2}$

$\therefore f(-x) = (-x)^{10} \sin (-x)$

$$- (-x)^5 \sqrt{1 + (-x)^2}$$

$\therefore f(-x) = -x^{10} \sin x + x^5 \sqrt{1 + x^2}$

$= -\ (x^{10} \sin x - x^5 \sqrt{1 + x^2})$

$= -f(x)$

$\therefore f(x)$ અયુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore f(x)\ dx = 0$

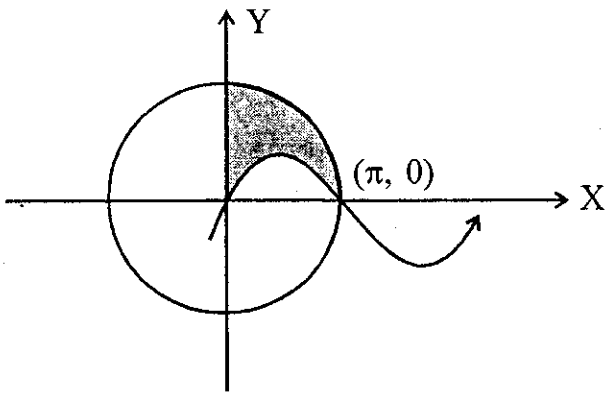
$$I = 3\int_{-5}^{5} x^2\ dx - 0 = 3\left\{2\int_0^5 x^2\ dx\right\}$$

($\because f(x) = x^2$ યુગ્મ વિધેય છે.)

$$= 6\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^5 = 2(125)$$

$I = 250$

(17) ઉકેલ : **(B)** $x^2 + y^2 = \pi^2$ એ ઉગમ બિંદુ કેન્દ્ર ધરાવતું અને π એકમ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.



અહીં પ્રથમ ચરણમાં વર્તુળ નું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{4}\ (\pi r^2) = \frac{1}{4}\ (\pi \times \pi^2) = \frac{\pi^3}{4}$$

તથા $y = \sin x$ ના અંતરાલ $[0, \pi]$ માના ભાગનું

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \int_0^{\pi} \sin x\ dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= [\cos x]_0^{\pi} = \cos 0 - \cos \pi$$

$$= 1 - (-1) = 2$$

$\therefore$ માગેલ ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{4}\pi^3 - 2 = \frac{1}{4}(\pi^3 - 8)$

(18) ઉકેલ : (C) પરવલય $y^2 = 4x$ અને રેખા $x + y = 0$ નું છેદબિંદુ મેળવતાં

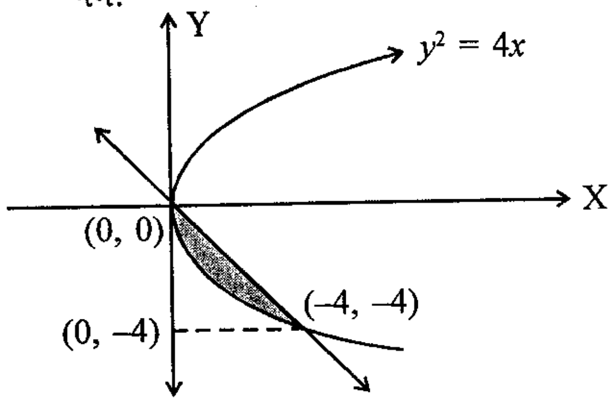
$\therefore y^2 = 4(-y)$

$\therefore y(y + 4) = 0$

$\therefore y = 0$ અને $y = -4$

$\therefore x = 0$ અને $x = -4$ મળે

આમ માગેલ છેદબિંદુઓ (0, 0) તથા (–4, –4) મળે.



આપણે વક્રમાં આવૃત્તિ પ્રદેશનું Y–અક્ષ પરત્વે ક્ષેત્રફળ મેળવતાં

s Yhe ûfftV¤ $A = \int_{-4}^{0} |f_1(y) - f_2(y)|\, dy$

$$= \left| \int_{-4}^{0} \left(\frac{y^2}{4} + y \right) dy \right|$$

$$= \left| \left(\frac{y^3}{12} + \frac{y^2}{2} \right)_{-4}^{0} \right|$$

$$= \left| 0 - \left(\frac{-64}{12} + \frac{16}{2} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{32}{12} \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

(19) ઉકેલ : (B) $I = \int \frac{x \sin x}{\sqrt{x \cos x - \sin x}}\, dx$

અહીં $x \cos x - \sin x = t$ આદેશ લેતાં

$(-x \sin x + \cos x - \cos x)\, dx = dt$

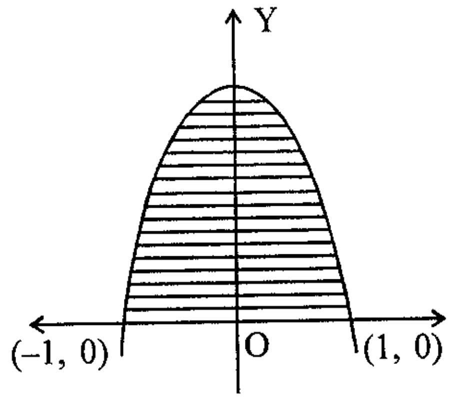
$\therefore -x \sin x\, dx = dt$

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2 \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$$

$= -2\,(\sqrt{t}) + c$

$= -2\,[\sqrt{x \cos x - \sin x}] + c$

(20) ઉકેલ : (D) વક્ર $y = 2\sqrt{1 - x^2}$, x–અક્ષને છેદે ત્યાં $y = 0$ થાય.



$\therefore 2\sqrt{1 - x^2} = 0$

$\therefore 1 - x^2 = 0$

$\therefore x^2 = 1$

$\therefore x = \pm 1$

ક્ષેત્રફળ $A = \int_{-1}^{1} y\, dx = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$

$$= 4 \int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

[$\because f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ યુગ્મ વિધેય છે.]

$$\therefore A = 4 \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x \right\}_0^1$$

$$= 2\, \{x \sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x\}$$

$$\therefore A = 2 \left\{ \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) - (0 + 0) \right\}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

(21) ઉકેલ : (A) $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}$

$\therefore e^{2y}\, dx = dx$

$\therefore \int e^{2y}\, dy = \int 1\, dx + c^1$

$\therefore \frac{1}{2} e^{2y} = x + c^1$

(જ્યાં c^1 સંકલનનો અચળ છે.)

$\therefore\ e^{2y} = 2x + c$ (જ્યાં $c = 2c^1$ છે.)
હવે $x = 5$ અને $y = 0$ મૂકતાં
$\therefore\ e^0 = 10 + c$
$\therefore\ 1 - 10 = c$
$\therefore\ c = -9$
$\therefore$ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ
$e^{2y} = 2x - 9$ થાય
હવે $y = 3$ માટે x મેળવતાં
$\therefore\ e^6 = 2x - 9$
$2x = e^6 + 9$
$\therefore\ x = \frac{1}{2}(e^6 + 9)$

(22) ઉકેલ : **(B)** $xy = ae^x + be^{-x}$
બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં
$\therefore\ x \cdot \frac{dy}{dx} + y(1) = ae^x - be^{-x}$
$\therefore\ xy_1 + y = ae^x - be^{-x}$
ફરીવાર x પ્રત્યે વિકલન કરતાં
$\therefore\ xy_2 + y_1(1) + y_1 = ae^x + be^{-x}$
$\therefore\ xy_2 + 2y_1 = xy$
$\therefore\ xy_2 + 2y_1 - xy = 0$

(23) ઉકેલ : **(A)** p_1 = બિંદુ P(1, 1, k) થી સમતલ
$\pi : 3x + 4y - 12z + 12 = 0$ નું લંબ અંતર
p_2 = બિંદુ Q(–3, 0, 1) થી સમતલ
$\pi : 3x + 4y - 122 + 12 = 0$ નું લંબ અંતર
અહીં $p_1 = p_2$ છે.
$\therefore\ \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
$= \frac{|ax_2 + by_2 + cz_2 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
$\therefore\ |\,3(1) + 4(1) - 12(k) + 12\,|$
$= |\,3(-3) + 0 - 12 + 12)$
$\therefore\ |\,19 - 12\,k) = |-9\,|$
$+ (19 - 12\,k) = -9$
$\therefore\ 19 - 12k = -9$
અથવા $-19 + 12\,k = -9$
$28 = 12\,k$ અથવા $\therefore\ -10 = -12\,k$
$\therefore\ k = \frac{7}{3}$ અથવા $\frac{5}{6}$

(24) ઉકેલ : **(B)** અહીં $\bar{a} = \overline{OA} = (2, 1, 1)$
$\bar{b} = \overline{OB} = (3, -1, 1)$
$\bar{c} = \overline{OC} = (-1, 1, -1)$ લેતાં
$\therefore$ ચતુષ્ફલકનું ઘનફળ $= |\,\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})\,|$
$= |\,[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\,|$
અહીં $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
$= 2(1 - 1) - 1(-3 + 1) + 1(3 - 1)$
$= 0 + 2 + 2 = 4$
$\therefore$ માગેલ ઘનફળ $= |\,[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\,| = 4$

(25) ઉકેલ : **(D)** અહીં α, β અને γ સદિશના દિક્ખૂણાઓ હોય તો $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ મળે.
હવે $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma)$
$= 2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1$
$+ 2\cos^2\gamma - 1$
$= 2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma] - 3$
$= 2(1) - 3 = -1$

(26) ઉકેલ : **(B)** $f(x) = x + x^{-1}$
$\therefore\ f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
મહત્તમ કે ન્યૂનત્તમ મૂલ્ય માટે $f'(x) = 0$
$\therefore\ 1 - \frac{1}{x^2} = 0$
$\therefore\ x^2 = 1$
$\therefore\ x = \pm 1$
હવે $f'(x) = 1 - x^{-2}$
$f''(x) = 0 - (-2x^{-3}) = \frac{2}{x^3}$
અહીં $x = -1$ માટે $f''(-1) = -2 < 0$
$\therefore\ x = -1$ માટે $f(x)$ મહત્તમ થાય.
$\therefore\ x = 1$ માટે મહત્તમ મૂલ્ય $= 1 + (1)^{-1}$
$= 1 + 1 = 2$

(27) ઉકેલ : **(C)** સાદા લોલકનો આવર્તકાળ
$T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$ પરથી મળે છે.

અહીં T ના માપનમાં 1% ત્રુટી છે.

$$\therefore \Delta T = \frac{1(T)}{100}$$

આપણે લંબાઈના l ના માપનમાં ત્રુટી Δl મેળવવી છે.

$$\therefore T = \frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$$

$$\therefore \frac{dT}{dl} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g}}$$

હવે $\Delta l = \frac{dl}{dT} \times \Delta T = \frac{\sqrt{gl}}{\pi} \times \frac{T}{100}$

$$= \frac{\sqrt{gl}}{\pi} \frac{2\pi}{100} \left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

$$\therefore \Delta l = l \cdot \frac{2}{100}$$

$\therefore$ લંબાઈની માપનમાં 2% ત્રુટી હોય.

(28) ઉકેલ : **(D)** $f(x) = x^x$

અહીં $y = x^x$ લેતાં

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^x (1 + \log x)$ મળે

અર્થાત્ $f'(x) = x^x (1 + \log x)$

હવે $f'(x) = 0$

$\therefore 1 + \log x = 0 \quad (\because x^x \neq 0)$

$\therefore \log x = -1$

$\therefore x = e^{-1}$

$\therefore x = \frac{1}{e}$

હવે $0 < x < \frac{1}{e}$

$\therefore \log x < \log \frac{1}{e}$

($\because$ $\log x$ વધતું વિધેય છે.)

$\therefore \log x < \log e^{-1}$

$\therefore \log x < 1$

$\therefore 1 + \log x < 0.$

$f'(x) < 0$

$\therefore x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ માં $f(x)$ ઘટતું વિધેય છે.

(29) ઉકેલ : **(C,** ત્રિજ્યાવાળા અને h ઊંચાઈ વાળા નળાકારનું ઘનફળ $v = \pi r^2 h$ અહીં $r = h$ છે.

$\therefore v = \pi r^3$

કદ (ઘનફળ)નો ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ વૃદ્ધિદર $= \frac{dv}{dr}$

$= 3\pi r^2$

(30) ઉકેલ : **(A)** $I = \int \left(\frac{2 + \sin 2x}{1 + \cos 2x}\right) e^x \, dx$

$$= \int \left(\frac{2 + 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x}\right) e^x \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}\right) e^x \, dx$$

$$= \int (\tan x + \sec^2 x)\, e^x \, dx$$

$\therefore I = \int (f(x) + f'(x))\, e^x \, dx$

જ્યાં $f(x) = \tan x$ છે.

$\therefore f'(x) = \sec^2 x$

$\therefore I = e^x (f(x)) + c$

$\therefore I = e^x \tan x + c$

(31) ઉકેલ : **(D)** $I = \int e^x \cdot \cos(2x)\, dx$

હવે $\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \{a \cos bx + b \sin bx\} + c$$

સૂત્રમાં $a = 1$ $b = 2$ મૂકો

$$\therefore I = \frac{e^x}{1 + 4} \{\cos 2x + 2 \sin 2x\}$$

$$= \frac{e^x}{5} \{\cos 2x + 2 \sin 2x\} + c$$

(32) ઉકેલ : **(C)** $I = \int_1^e \log x \, dx$

$u = \log x$ અને $v = 1$ લઈને ખંડશઃ સંકલન કરતાં

$$I = \left\{u \int v\, dx - \int \left(u' \int v\, dx\right) dx\right\}_1^e$$

$$I=\left\{x\log x-\int\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)dx\right\}_1^e$$

$$=\left\{x\log x-\int 1\,dx\right\}_1^e$$

$$=\{x\log x-x\}_1^e$$

$$=(e\log e-e)-\{\log 1-1\}$$

$$=(e-e)-(0-1)\ (\because \log e=1 \text{ છે.})$$

$$\therefore I=0+1=1$$

અન્ય રીત :

$$I=\int_1^e \log x\,dx$$

અહીં $\log x = t$ આદેશ મૂકો

$\therefore\ x = e^t$ લઘુગુણકની વ્યાખ્યા

$\therefore\ dx = e^t\,dt$

તથા $x = e$ તો $t = \log e$

$\therefore\ t = 1$

અને $x = 1$ તો $t = \log 1$

$\therefore\ t = 0$

$$\therefore I=\int_0^1 (t)\,e^t\,dt=\int_0^1 [(t-1)+1]\,e^t\,dt$$

$$=\int_0^1 e^t\,(f(t)+f'(t))\,dt$$

જ્યાં $f(t) = t - 1$ છે.

$$\therefore I=(e^t f(t))_0^1=[e^t(t-1)]_0^1$$

$$=e^1(1-1)-e^0(0-1)$$

$$\therefore I=e(0)-1(-1)=1$$

(33) ઉકેલ : **(B)** $I=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$

અહીં $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ છે.

$$\therefore f(-x)=\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\frac{1+e^x}{1-e^x}$$

$$=-\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$$

$\therefore\ f(-x) = -f(x)$

$\therefore\ f(x)$ અયુગ્મ વિધેય છે.

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)=0$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx=\log_e 1=0$$

(34) ઉકેલ : **(A)** $I=\int_0^1\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

$$=\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

હવે $e^x = t$ આદેશ મૂકો

$\therefore\ e^x\,dx = dt$

તથા $x = 0$ તો $t = e^0$

$\therefore\ t = 1$

અને $x = 1$ તો $t = e$

$$\therefore I=\int_1^e\frac{1}{1+t^2}\,dt=[\tan^{-1}(t)]_1^e$$

$$=\tan^{-1}(e)-\tan^{-1}(1)$$

$$\therefore I=\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}$$

(35) ઉકેલ : **(B)** $I=\int_1^4\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-1}dx$

$$=\int_1^4\frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

જ્યાં $f(x) = x^2 + 1$ છે.

$\therefore\ f'(x) = 2x$

$$\therefore I=\frac{1}{2}[\log|f(x)|]_1^4$$

$$=\frac{1}{2}[\log(x^2+1)]_1^4$$

$$= \frac{1}{2} \{\log (17) - \log (2)\}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} \log \left(\frac{17}{2}\right)$$

(36) ઉકેલ : **(C)** વક્ર $y = 2x - x^2$ ના X–અક્ષના છેદબિંદુ માટે $y = 0$ લેતાં

$$\therefore 2x - x^2 = 0$$

$$\therefore x(2 - x) = 0$$

$x = 0$ અને $x = 2$

$$\text{ક્ષેત્રફળ } A = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx$$

$$= \left|\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^2\right|$$

$$= \left|x^2 - \frac{x^3}{3}\right|_0^2$$

$$= \left|4 - \frac{8}{3}\right| = \left|\frac{12 - 8}{3}\right| = \frac{4}{3}$$

(37) ઉકેલ : **(D)** વક્ર $y = |x - 5|$ ના X–અક્ષ સાથેનું છેદબિંદુ માટે $y = 0$ લેતાં

$$\therefore x - 5 = 0$$

$$\therefore x = 5$$

$\therefore$ વક્ર X–અક્ષને (5, 0) માં છેદશે.

તથા $\forall x$ માટે $y \geq 0$ થાય.

$$\therefore A = \left|\int_0^2 y\, dx\right| = \int_0^2 (5 - x)\, dx$$

[$\because \forall x \in (0, 2)$ માટે $x - 5 < 0$ છે.]

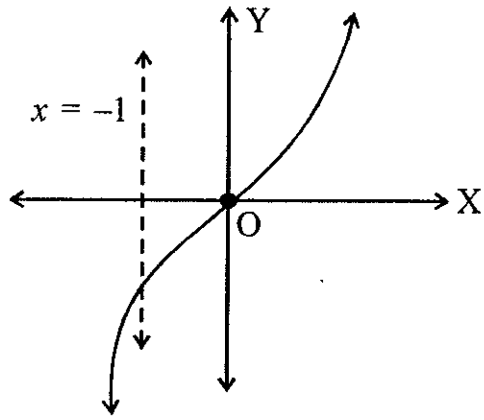
$$= \left(5x - \frac{x^2}{2}\right)_0^2 = 10 - 2 = 8 \text{ એકમ}$$

(38) ઉકેલ : **(C)** $y = x \cdot |x|$

$\therefore y = 0$ તો $x \cdot |x| = 0$

$$\therefore x = 0$$

વક્ર X–અક્ષને (0, 0) માં કાપે.



$$\text{ક્ષેત્રફળ } A = \left|\int_{-1}^0 y\, dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^0 x\,|x|\, dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^0 -x^2\, dx\right|$$

[$\because x \in (-1, 0)$ તો $x < 0$ છે.]

$$= \left|\frac{-1}{3} (x^3)_{-1}^0\right|$$

$$\therefore \text{ક્ષેત્રફળ} = \left|\frac{-1}{3} (0^3 - (-1)^3\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{3} (0 + 1)\right| = \frac{1}{3}$$

(39) ઉકેલ : **(C)** $x\, e^{\frac{dy}{dx}} + \frac{dy}{dx}\, 2 = 0$

આપેલ વિકલ સમીકરણમાં વિકલિતનો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક 1 છે માટે તેની કક્ષા 1 થાય પણ વિકલ સમીકરણને બહુપદીમાં દર્શાવી શકાય નહીં. તેથી પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે.

(40) ઉકેલ : **(C)** $(e^x + e^{-x}) \frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\therefore dy = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) dx$$

$$\therefore \int 1\, dy = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + \epsilon^{-x}}\, dx$$

$$\therefore y = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx + c$$

$\therefore$ જ્યાં $f(x) = e^x + e^{-x}$ છે.

$\therefore y = \log |f(x)| + c$

$\therefore y = \log |e^x + e^{-x}| + c$

(41) ઉકેલ : **(D)** $f(x, y) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$= x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}\left(\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = x^{\frac{-1}{6}}\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\therefore$ પરિમાણ $n = \dfrac{-1}{6}$

(42) ઉકેલ : **(D)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+y+2}$

$\therefore \dfrac{dx}{dy} = x + y + 2$

$\therefore \dfrac{dx}{dy} + (-1)x = y + 2$ જે

$\dfrac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ પ્રકારનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

$\therefore P(y) = -1$

$\therefore$ સંકલ્પકારક અવયવ $= e^{\int P(y)\,dy}$

$= e^{\int -1\,dy} = e^{-y}$

(43) ઉકેલ : **(C)** અહીં $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ છે.

$\therefore \bar{x} \perp \bar{y}$ છે

$\therefore \bar{x} \wedge \bar{y} = \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ થાય.

હવે $|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \sin \alpha$

$= (1)\ (1) \sin \dfrac{\pi}{2}$

$= 1 \times 1 = 1$

(44) ઉકેલ : **(B)** $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 0$

$\therefore |\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}|^2 = 0$

$\therefore (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) = 0$

$\therefore \bar{x}\,\bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} + \bar{z} \cdot \bar{z}$
$+ 2(\bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}\,\bar{z} + \bar{z} \cdot \bar{x}) = 0$

$\therefore |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 + |\bar{z}|^2$
$+ 2(\bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}\,\bar{z} + \bar{z} \cdot \bar{x}) = 0$

$\therefore 4 + 16 + 1 + 2(\bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}\,\bar{z} + \bar{z}\,\bar{x}) = 0$

$\therefore 2(\bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}\,\bar{z} + \bar{z}\,\bar{x}) = -21$

$\therefore \bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}\,\bar{z} + \bar{z}\,\bar{x} = \dfrac{-21}{2}$

$\therefore |\bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}\,\bar{z} + \bar{z}\,\bar{x}| = \left|\dfrac{-21}{2}\right| = \dfrac{21}{2}$

(45) ઉકેલ : **(A)** $\bar{a} \times \{\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})\}$

$= \{\bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})\}\ \bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{a})\ (\bar{a} \times \bar{b})$

$= [\bar{a}\ \ \bar{a}\ \ \bar{b}]\ \bar{a} - |\bar{a}|^2\ (\bar{a} \times \bar{b})$

$= 0 \cdot \bar{a} + |\bar{a}|^2\ (\bar{b} \times \bar{a})$

$= |\bar{a}|^2\ (\bar{b} \times \bar{a})$

(46) ઉકેલ : **(A)** $\bar{a}$ સાથે સમરેખ થાય તેવા એકમ સદિશો $= \pm \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ હોય.

$\therefore$ આવા સદિશોની સંખ્યા 2 થાય.

(47) ઉકેલ : **(B)** અહીં $\cos \alpha = |\bar{x} \cdot \bar{y}|$ છે

પણ $\cos \alpha = \dfrac{|\bar{x} \cdot \bar{y}|}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}$

$\therefore |\bar{x}| \,.\, |\bar{y}| = 1$ થાય

હવે $\sin \theta = \dfrac{|\bar{x} \times \bar{y}|}{|\bar{x}|\,|\bar{y}|}$

$\therefore \sin \theta = |\bar{x} \times \bar{y}|$

(48) ઉકેલ : **(A)** $\dfrac{3-x}{3} = \dfrac{2y-3}{5} = \dfrac{z-0}{2}$

$\therefore \dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{z-0}{2}$

$\therefore A(\bar{a}) = \left(3, \dfrac{3}{2}, 0\right)$ અને

દિશા $\bar{l} = \left(-3, \dfrac{5}{2}, 2\right)$

સદિશ સમીકરણ $\bar{r} = \bar{a} + k'(\bar{l})$

$\therefore \bar{r} = \left(3, \frac{3}{2}, 0\right) + k'\left(-3, \frac{5}{2}, 2\right)$

$\bar{r} = (-6, 5, 4) = (6, 3, 0) + k(-6, 5, 4)$

જ્યાં $k = \frac{k'}{2} \in R$

(49) ઉકેલ : **(D)** O(0, 0, 0) માંથી સમતલ પરનો લંબપાદ $A(a^2, b^2, c^2)$ છે.

$\therefore \bar{n} = \overrightarrow{OA} = A - 0$

$\bar{n} = (a^2, b^2, c^2)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{a} \cdot \bar{a}$

જ્યાં $\bar{a} = (a^2, b^2, c^2)$

$\therefore (x, y, z) \cdot (a^2\ b^2\ c^2) = a^4 + b^4 + c^4$

$\therefore a^2x + b^2y + c^2z = a^4 + b^4 + c^4$

(50) ઉકેલ : **(C)** પ્રથમ રેખાની દિશા $l = (2, 1, 3)$

બીજી રેખાની દિશા $m = (2, 1, 3)$

અહીં બંને રેખાની દિશા સમાન છે.

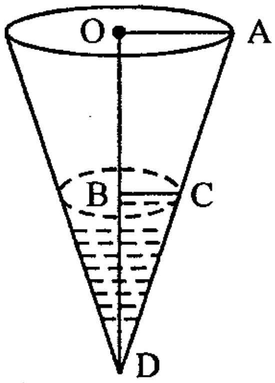
$\therefore$ વળી $A(\bar{a}) = (0, 0, 0) \notin$ બીજી રેખા.

$\therefore$ રેખાઓ સમાંતર છે.

PART : B

વિભાગ : A

(1) ઉકેલ : ધારો કે કોઈપણ સમયે પાણીથી બનતા શંકુની ઊંચાઈ તથા ત્રિજ્યા અનુક્રમે h તથા r છે.



$\therefore$ સમરૂપતાના સિદ્ધાંત મુજબ

$\therefore \frac{OA}{BC} = \frac{OD}{BD}$

$\therefore \frac{4}{r} = \frac{6}{h}$

$\therefore \frac{r}{h} = \frac{4}{6}$

$\therefore \frac{r}{h} = \frac{2}{3}$

$\therefore r = \frac{2h}{3}$

હવે t સમયે ટાંકીમાં રહેલા પાણીનું કદ

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{3}\right)^2 h$

$\therefore V = \frac{4\pi h^3}{27}$

$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{27}\left(3h^2 \frac{dh}{dt}\right)$

અહીં $\frac{dv}{dt} = -2$ (met)^3/sec

($\because$ સફાઈ માટે પાણી ટાંકીની બહાર ખાલી કરવામાં આવે છે.)

$\therefore -2 = \frac{4\pi}{27}(3h^2)\frac{dh}{dt}$

$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{9(-2)}{(4\pi)h^2}$

$\therefore \left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=3} = \frac{(-2)\,9}{4\pi\,(3^2)}$

$= \frac{-1}{2\pi}$ મીટર / મિનિટ

$\therefore$ પાણીની ઊંચાઈ $\frac{1}{2\pi}$ મીટર/ મિનિટના દરથી ઘટે છે.

અથવા

(1) ઉકેલ : $f(x) = \sec^{-1}(x)$ લેતાં

જ્યાં $x = -2.01$

$x = 2$ અને $\Delta x = 0.01$

$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

$\therefore f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\Delta x \cdot f'(x) = \frac{(0.01)}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{200\sqrt{3}}$

અહીં સ્થૂળ મૂલ્ય $\sec^{-1}(-2.01)$

$\cong \pi - \sec^{-1}(2.01)$

$\cong \pi - \{\sec^{-1} x + f'(x)\,\Delta x\}$

$$\cong \pi - \left\{\sec^{-1}(2) + \frac{1}{200\sqrt{3}}\right\}$$

$$\cong \pi - \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{200\sqrt{3}}\right\}$$

$$\cong \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{200\sqrt{3}}$$

(2) ઉકેલ : અહીં રેખાના સમીકરણ પરથી

$\bar{a} = (1, 2, 3), \bar{l} = (2, 3, 4)$

$\bar{b} = (4, 1, 0), \bar{m} = (5, 2, 1)$

$\therefore \bar{b} - \bar{a} = (3, -1, -3)$

અને $\bar{l} \times \bar{m} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= i(3 - 8) - j(2 - 20) + k(4 - 15)$

$= -5\bar{i} + 18\bar{j} + 11\bar{k}$

$= (-5, 18, -11) \neq \bar{0}$

$\therefore (\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})$

$= (3, -1, -3) \cdot (-5, 18, -11)$

$= -15 - 18 + 33 = -33 + 35 = 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ પરસ્પર અનન્ય બિંદુમાં છેદે છે.

$\therefore$ રેખાઓ સમતલીય છે.

આ રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$ પ્રમાણે

મળશે

$$\therefore \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore (x - 1)(-5) - (y - 2)(-18) + (z - 3)(-11) = 0$

$\therefore -5x + 5 + 18y - 36 - 11z + 33 = 0$

$\therefore 5x - 18y + 11z = 2$

જે માગેલ સમતલ છે.

(3) ઉકેલ : $I = \int x^2 \cdot 2^x \, dx$

$u = x^2$ અને $v = 2^x$ લઈને ખંડશઃ સંકલન કરતાં

$$I = u\int v\,dx = \int\left(u' \int v\,dx\right) dx$$

$$= x^2 \int 2^x\,dx - \int 2x \cdot \frac{2^x}{\log_e 2}\,dx$$

$$= x^2\left(\frac{2^x}{\log_e 2}\right) - 2\int \frac{x \cdot 2^x}{\log_e 2}\,dx$$

$$= x^2\left(\frac{2^x}{\log_e 2}\right) - \frac{2}{\log_e 2}\int x \cdot 2^x\,dx$$

$$= \frac{x^2 \cdot 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2}\left\{x\int 2^x\,dx - \int 1 \cdot \frac{2^x}{\log_e 2}\,dx\right\}$$

$$I = \frac{x^2 \cdot 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2}\left\{\frac{x \cdot 2^x}{\log_e 2} - \frac{2^x}{(\log_e 2)^2}\right\} + c$$

(4) ઉકેલ : ધારો કે વક્ર પરના બિંદુ $P(x, y)$ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx}$ થાય.

અહીં $\frac{dy}{dx}$ એ બિંદુના y યામના વ્યસ્ત જેટલો છે.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

$\therefore y\,dy = dx$

$\therefore \int y\,dy = \int 1\,dx$

$\therefore \frac{y^2}{2} = x + c$

$\therefore y^2 = 2x + 2c$ ... ... (i)

વક્ર $P(-1, 2)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore 4 = -2 + 2x$

$\therefore 2 = -1 + c$

$\therefore c = 3$

પરિણામ (1) માં આ મૂલ્ય મૂકો

$y^2 = 2x + 6$ માગેલ વક્ર થાય.

(5) ઉકેલ : $I = \int \log x\,(1+x)^{-2}\,dx$

$u = \log x$ અને $v = (1+x)^{-2}$ મૂકો.

$= \log x \int (1+x)^{-2}\,dx \quad (1+x)^{-2} = v$

$- \int \left[\frac{d}{dx} \log x \int (1+x)^{-2}\, 2x\right] dx$ ... ... (1)

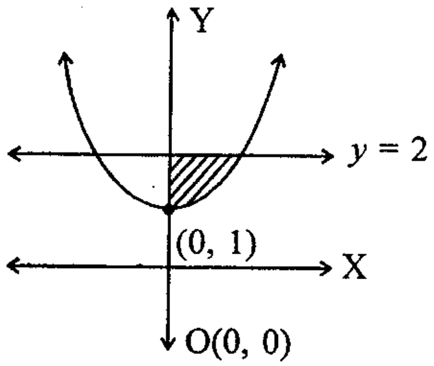
$= \log x \dfrac{(1+x)^{-1}}{-1} - \int \dfrac{1}{x} \dfrac{(1+x)^{-1}}{-1}\,dx$

$= \dfrac{-\log x}{1+x} + \int \dfrac{1}{x(x+1)}\,dx$

$= \dfrac{-\log x}{1+x} + \int \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right) dx$

$\therefore I = \dfrac{-\log x}{1+x} + \log|x| - \log|x+1| + c$ ... ... (1)

(6) ઉકેલ : $y = x^2 + 1$ નું (પરવલય) શીર્ષ $= (0, 1)$ છે.



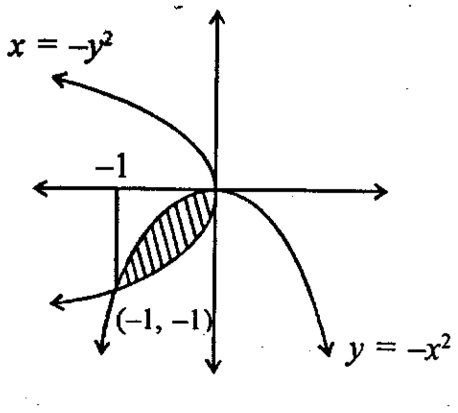
$I = \int_1^2 x\,dy = \int_1^2 (y-1)^{\frac{1}{2}}\,dy$ ... ... (1)

$= \left[\dfrac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \dfrac{2}{3} - 0 = \dfrac{2}{3}$

$A = 2\,|I| = \dfrac{4}{3}$ ... ... (1)

અથવા

(6) $y = -x^2$ તથા $x = -y^2$ નાં છેદબિંદુ (0, 0) તથા (−1, −1) મળે



$f_1(x) = -x^2$ તથા $x = -y^2$ પરથી

$y = -(-x)^{\frac{1}{2}}$

$f_2(x) = -(-x)^{\frac{1}{2}}$

$I = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$

$= \int_{-1}^{0} -x^2 + (-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \left[\dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{(-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}$

$= 0 - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

$A = 1\,|I| = \dfrac{1}{3}$

(7) ઉકેલ : ધારો કે $\bar{y} = (5, 12)$ ને લંબ એકમ સદિશ $\bar{x} = (x, y)$ છે.

હવે $|\bar{x}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ ... ... (1)

તથા $\bar{x} \perp \bar{y} \;\therefore\; \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

$\therefore (5, 12) \cdot (x, y) = 0$

$\therefore 5x + 12y = 0$

$\therefore y = \dfrac{-5x}{12}$ ... ... (2)

$x^2 + \dfrac{25x^2}{144} = 1$

$\therefore x^2 = \dfrac{144}{169}$

$\therefore x = \pm \dfrac{12}{13}$

(2) માં $x = \pm \dfrac{12}{13}$ મૂકતાં

$y = \dfrac{-5}{12}\left(\pm \dfrac{12}{13}\right)$

$\therefore y = \dfrac{-5}{13}$ અથવા $y = \dfrac{5}{13}$

$\therefore \bar{y} = \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{-5}{13}\right)$ અથવા

$\bar{y} = \left(\dfrac{-12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$ ... ... (1)

(8) ઉકેલ : રેખા $x = 3 - 4z, y = 3z + 2$

$\therefore z = \frac{3-x}{4}, z = \frac{y-2}{3}$

$\therefore \frac{3-x}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-0}{1}$

$\therefore \frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ ની દિશા

$\bar{l} = (-4, 3, 1)$

$\therefore |\bar{l}| = \sqrt{26}$

$\bar{l} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left(\frac{-4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

$\therefore$ રેખાની દિક્કોસાઈન $\frac{-4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}$

વિભાગ : B

(9) ઉકેલ : પ્રથમ વક્ર $y = x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x$

$\therefore$ (1, 1) આગળ પ્રથમ વક્રનો ઢાળ $= m_1$

$\therefore m_1 = 2$ ... ... (i)

દ્વિતીય વક્ર $x^3 + 6y = 7$

$\therefore 3x^2 + 6\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{2}$

(1, 1) આગળ દ્વિતીય વક્રનો ઢાળ $= m_2$

$\therefore m_2 = \frac{-1}{2}$ ... ... (ii)

અહીં $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{-1}{2}\right)(2)$

$\therefore m_1 \cdot m_2 = -1$

$\therefore$ વક્રના સ્પર્શકો પરસ્પર કાટખૂણે છેદે છે.

$\therefore$ વક્રો પરસ્પર લંબચ્છેદી છે.

(10) ઉકેલ : $I = \int x(\sec^2 x \tan x)\, dx$

$u = x$ અને $v = \sec^2 x \tan x$ લેતાં

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1$

અને $\int v\, dx = \int \sec^2 x \tan x\, dx$

$\therefore \int v\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx$

$= \int f(x) \cdot f'(x)\, dx$

$= \frac{(f(x))}{1+1} + c = \frac{\tan^2 x}{2}$

$\therefore I = 4\int v\, dx - \int\left(u' \int v\, dx\right) dx$

(ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ)

$\therefore I = x\left(\frac{\tan^2 x}{2}\right) - \int \frac{\tan^2 x}{2}\, dx$

$= \frac{1}{2}\left\{x \tan^2 x \int(\sec^2 x - 1)\, dx\right\}$

$\therefore I = \frac{1}{2}\{x \tan^2 x - \tan x + x\} + c$

અથવા

(10) ઉકેલ : $I = \int\left(\frac{\sqrt{1 - \sin x}}{1 + \cos x}\right) e^{\frac{-x}{2}}\, dx$

$\frac{-x}{2} = t$ મૂકો.

$\therefore x = -2t$

$\therefore dx = -2dt$ ... ... (i)

અહીં $1 - \sin x = 1 - \sin(-2t)$

$= 1 + \sin 2t$

$= \sin^2 t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t$

$\therefore 1 - \sin x = (\sin t + \cos t)^2$

$\therefore \sqrt{1 - \sin x} = \sqrt{(\sin t + \cos t)^2}$

$\therefore \sqrt{1 - \sin x} = \sin t + \cos t$ ... ... (ii)

તથા $1 + \cos x$

$= 1 + \cos[-2t] = 1 + \cos 2t$

$(\because \cos(-\theta) = \cos\theta)$

$\therefore 1 + \cos x = 2\cos^2 t$ ... ... (iii)

પરિણામ (i), (ii) અને (iii) ના મૂલ્યો (I) માં મૂકતાં

$\therefore I = \int \frac{\sin t + \cot t}{2\cos^2 t} e^t (-2\, dt)$

$= -\int\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos t}\right) e^t\, dt$

$\therefore\ I = -\int (\sec t + \sec t \tan t)\, e^t\, dt$

$= -\int (\sec t + \sec t \tan t)\, e^t\, dt$

$= -(e^t f(t) + c$

જ્યાં $f(t) = \sec t$

$\therefore\ I = -e^{\left(\frac{-x}{2}\right)} \sec\left(\frac{-x}{2}\right) + c$

$I = e^{\left(\frac{-x}{2}\right)} \sec\left(\frac{-x}{2}\right) + c$

(11) ઉકેલ : અહીં વિધેય $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ એ ગણ R ના અંતરાલ [0, 2] માં સતત છે.

અંતરાલ [0, 2] નું સમાન લંબાઈના n ઉપઅંતરાલમાં વિભાજન કરતાં પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n}$ થાય.

જ્યાં $b = 2,\ a = 0$

$\therefore\ h = \frac{2-0}{n}$

$\therefore\ h = \frac{2}{n}$

હવે $f(a + ih) = f(0 + ih)$ થાય.

$= f(ih)$

$= 3i^2h^2 - 2ih + 4$

$= 3i^2\left(\frac{4}{n^2}\right) = 2i\left(\frac{2}{n}\right) + 4$

$= \frac{12}{n^2} i^2 - \frac{-4i}{n} + 4$

$\therefore$ સરવાળાનું લક્ષ $= \lim\limits_{n \to \infty} h \sum\limits_{i=1}^{n} f(ih)$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{n}\left\{\Sigma\left(\frac{12i^2}{n^2} - \frac{4i}{n} + 4\right)\right\}$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{n}\left\{\frac{12}{n^2}\Sigma i^2 - \frac{4}{n}\Sigma i + 4\Sigma 1\right\}$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{24}{n^3}\, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$- \lim\limits_{n \to \infty} \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{8}{n}$

$= \lim\limits_{n \to \infty} 4(1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$

$- \lim\limits_{n \to \infty} 4\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 8$

$= 4(1 + 0)(2 + 0) - 4(-1 + 0) + 8$

$= 8 - 4 + 8$

$\therefore$ સરવાળાનું લક્ષ $= 12$

(12) ઉકેલ : $I = \int_{-1}^{2} |2x - 1|\, dx$

અહીં $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\therefore\ |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x, & x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2x - 1)\, dx$

$= (x - x^2)_{-1}^{\frac{1}{2}} + (x^2 - x)_{\frac{1}{2}}^{2}$

$= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (-1 - 1)\right]$

$+ \left[(4 - 2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$

$= \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$

(13) ઉકેલ : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y) + \cos(x + y)$ માં

હવે $x + y = t$ આદેશ મૂકો.

$\therefore\ 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$

$\therefore$ આપેલ વિકલ સમીકરણ નીચે મુજબ થાય.

$\therefore\ \frac{dt}{dx} = 1 + \cos t + \sin t$

$\therefore \dfrac{dt}{1 + \cos t + \sin t} = dx$

$\therefore \displaystyle\int \dfrac{1}{1 + \cos t + \sin t}\, dt = \int 1\, dx$

$\therefore \displaystyle\int \dfrac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt$

$= x + c$

$\therefore \displaystyle\int \dfrac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{t}{2}}}{1 + \tan\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = x + c$

$\left(\text{ડા.બા.માં દરેક પદને } 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \text{ વડે ભાગતાં}\right)$

$\therefore \displaystyle\int \dfrac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = x + c$

$\therefore \displaystyle\int \dfrac{f'(t)}{f(t)}\, dt = x + c$

જ્યાં $f(t) = 1 + \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$

$\therefore \log |f(t)| = x + c$

$\therefore \log \left|1 + \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\right| = x + c$

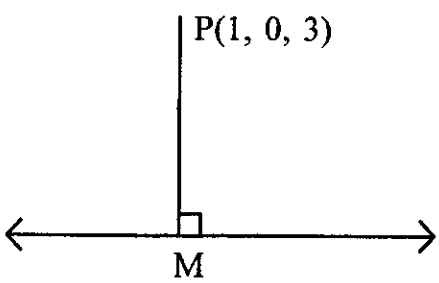
$\therefore \log \left|1 + \tan\left(\dfrac{x + y}{2}\right)\right| = x + c$

જે માગેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

(14) ઉકેલ : અહીં $\bar{r} = (5, 9, -1) + k(1, 2, -2)$

$k \in R$

$\therefore \bar{r} = (5 + k, 9 + 2k, -1 - 2k)\ k \in R$



ધારો કે લંબપાદ

$= M(4 + k, 9 + 2k, -1 - 2k)$ છે $\in k \in R$

$\therefore \overrightarrow{PM} = (4 + k, 9 + 2k, -4 - 2k)$ તથા

રેખાની દિશા $\bar{l} = (1, 2, -2)$ થશે.

હવે $\overrightarrow{PM} \perp \bar{l}$

$\therefore \overrightarrow{PM} \cdot \bar{l} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$

$\therefore (4 + k, 9 + 2k, -4 - 2k)$

$\cdot (1, 2, -2) = 0$

$\therefore 4 + k + 18 + 4k + 8 + 4k = 0$

$\therefore 9k = -30$

$\therefore k = \dfrac{-10}{3}$

$\therefore$ લંબપાદ M

$\left(5 - \dfrac{10}{3}, 9 + 2\left(\dfrac{-10}{3}\right), -1 - 2\left(\dfrac{-10}{3}\right)\right)$

$= M\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{17}{3}\right)$

હવે $\overleftrightarrow{PM}$ ની દિશા $= \overrightarrow{PM} = M - P$

$= \left(\dfrac{5}{3} - 1, \dfrac{7}{3} - 0, \dfrac{17}{3} - 3\right)$

$= \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{1}{3}(2, 7, 8)$

$\therefore \overleftrightarrow{PM}$ ની દિશા $= \bar{n} = (2, 7, 8)$ લઈ શકાય

$\therefore$ લંબરેખાનું સદિશ સમીકરણ

$\bar{r} = (1, 0, 3) + k(2, 7, 8)\ k \in R$

નીચે મુજબ થાય.

હવે લંબની લંબાઈ = PM

$= |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{49}{9} + \dfrac{64}{9}}$

$= \dfrac{1}{3}\sqrt{117} = \sqrt{13}$ એકમ

વિભાગ : C

(15) ઉકેલ : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{\sin x + \cos x}\, dx$

અહીં $a = \dfrac{\pi}{2}$ છે.

$\therefore x$ ને સ્થાને $a - x$ અર્થાત્ $\dfrac{\pi}{2} - x$ મૂકો.

$$\therefore\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin x + \cos x}\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$\therefore\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx - I$$

(પરિણામ (i) પરથી)

$$\therefore\ 2I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos x \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left\{\log\left|\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|\right\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left\{\log\left|\sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| - \log\left|\sec\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right|\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left\{\log\left|\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right| - \log\left|\sec\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4}\right|\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left\{\log(\sqrt{2}+1) - \log(\sqrt{2}-1)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1)$$

જે માગેલ પરિણામ છે.

(16) ઉકેલ : પ્રથમ રેખા $A(\bar{a}) = (1, -1, 1)$ માંથી પસાર થાય છે અને તેની દિશા $\bar{l} = (3, 2, 5)$ છે.

બીજી રેખા $B(\bar{b}) = (-2, 1, -1)$ માંથી પસાર થાય છે અને તેની દિશા $\bar{m} = (4, 3, -2)$ છે.

હવે $\bar{b} - \bar{a} = (-2, 1, -1) - (1, -1, 1)$

$= (-3, 2, -2)$

તેમજ $\bar{l} \times \bar{m} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$= \bar{i}(-4 - 15 - \bar{j}(-6 - 20) + \bar{k}(9 - 8)$

$= -19i + 26j + k$

$= (-19, 26, 1)$

$\neq \bar{0}$

તથા $(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})$

$= (-3, 2, -2) \cdot (-19, 26, 1)$

$= 57 + 52 - 2 = 107 \neq 0$

આપેલ રેખાઓ છેદક રેખા નથી

$\therefore$ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

p = છેદક રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર

$$= \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})|}{|\bar{l} \times \bar{m}|}$$

$$= \frac{|107|}{\sqrt{(-19)^2 + (26)^2 + 1}}$$

$$= \frac{107}{\sqrt{361 + 676 + 1}}$$

$$\therefore p = \frac{107}{\sqrt{1038}}$$

(17) ઉકેલ : $I = \int \frac{\sin x}{\sin 4x}\, dx$

$$= \int \frac{\sin x}{2 \sin 2x \cos 2x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{4 \sin x \cos x \cos 2x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{4 \cos x \cos 2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x \cos 2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \sin^2 x)(1 - 2\sin^2 x)}$$

$\sin x = t$ આદેશ લેતાં $\cos x\, dx = dt$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1 - t^2)(1 - 2t^2)}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t^2 - 1)(2t^2 - 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2t^2 - 2)(2t^2 - 1)}\, dt \qquad \text{... ... ... (1)}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} \int \frac{(2t^2 - 1) - (2t^2 - 2)}{(2t^2 - 2)(2t^2 - 1)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2t^2 - 2} - \frac{1}{2t^2 - 1}\, dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2 - 1}\, dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}t)^2 - 1}\, dt$$

$$= \frac{1}{8} \log \left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| - \frac{1}{2} \left\{\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left|\frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1}\right|\right\} + c$$

$$\therefore I = \frac{1}{8} \log \left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left|\frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\sqrt{2} \sin x + 1}\right| + c$$

(18) ઉકેલ : ડબ્બો બનાવવાનું ખર્ચ ન્યૂનત્તમ થાય તે માટે તેમાં ઓછામાં ઓછું પતરું વપરાવું જોઈએ. એટલે કે ડબ્બાનું કુલ પૃષ્ઠફળ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ન્યૂનત્તમ થવું જોઈએ.

વળી નળાકારનું કદ $V = \pi r^2 h$.

તેમાં 1 લી = 1000 સે.મી.^{3} તેલ સમાય છે.

$$\therefore V = \pi r^2 h = 100 \qquad \text{... ... ... (1)}$$

$$\therefore h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$\therefore S = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\therefore \frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$$\therefore r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ સે.મી.}$$

હવે $\frac{d^2S}{dt^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0$

$\therefore$ કુલ પૃષ્ઠફળ અને તેથી ખર્ચ ન્યૂનત્તમ થાય તે માટે $r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ સે.મી. અને

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{500}{\pi} \times \frac{2}{r^2} = r^3 \times \frac{2}{r^2} = 2r$$

$\therefore$ ખર્ચ ન્યૂનત્તમ કરવા માટે તેની ઊંચાઈ તેના વ્યાસ જેટલી હોવી જોઈએ.

અથવા

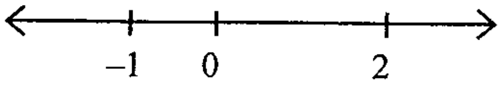
(18) ઉકેલ : $f : R \to R$,

$f(x) : 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

$\therefore f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$= 12x\ (x^2 - x - 2)$

$= 12x\ (x - 2)\ (x + 1)$



જો $x < -1$ તો $x < 0, x - 2 < 0, x + 1 < 0$

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore (-\infty, -1)$ માં f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

જો $-1 < x < 0$ તો $x < 0$, $x - 2 < 0$, $x + 1 > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore (-1, 0)$ માં f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

જો $0 < x < 2$ તો $x > 0$, $x - 2 < 0$, $x + 1 > 0$

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore (0, 2)$ માં f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

જો $2 < x$ તો $x > 0, x - 2 > 0, x + 1 > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore (2, \infty)$ માં f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

આમ $(-1, 0)$ અને $(2, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું તથા $(-\infty, -1)$ અને $(0, 2)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

• • •