www.inyatrust.com

Total No. of Questions : 40 ]

Code No. **35**

Total No. of Printed Pages : 16 ]

**March, 2013**

# MATHEMATICS

( Kannada and English Versions )

Time : 3 Hours 15 Minutes ] [ Max. Marks : 100

( Kannada Version )

*ಸೂಚನೆ :* i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ಐದು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

ii) ವಿಭಾಗ **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

## ವಿಭಾಗ – A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $10 \times 1 = 10$

1. $4x \equiv 5 \pmod 2$ ಸಮಶೇಷಿಯತೆಗೆ ಮೂಲ ಇದೆಯೇ ? ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣಗಳ ಮೇಲೆ $a * b = \sqrt{ab}$, $\forall\, a, b \in I$ '*' ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದೆಯೇ ? ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

3. $x = at^2$ ಮತ್ತು $y = 2at$ ಪ್ರಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಆಗಿರುವ ಶಂಕುಜದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯು ಎಷ್ಟು ?

[ Turn over

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



4. ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ಬಿಂದು ಪಥ ಯಾವುದು ?

5. $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $(1+ni)^2$ ನಲ್ಲಿ ಊಹ್ಯಭಾಗ ( Purely imaginary ) ಮಾತ್ರ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $n$ ನ ಬೆಲೆ ಏನು ?

7. $y=\tan\left(\log_e \sin x\right)$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $f(x)=\begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$ ಆದರೆ, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. ಒಂದು ಸದಿಶವು ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳೊಡನೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $\int_0^{\pi/2}\cos x\, e^{\sin x}\,dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ವಿಭಾಗ – B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $10\times 2=20$

11. $c$ ಮತ್ತು $a$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಮತ್ತು $\frac{c}{ab}$ ಆದರೆ, $\frac{c}{b}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, $A^{-1}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



13. ಉಪಸಂಕುಲವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

14. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ( 2, – 3 ), $3x - 4y - 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕವಾದರೆ ಆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಸಂಕುಲ $G$ ಯಲ್ಲಿ $(ab)^2 = a^2 b^2$, $\forall\, a, b \in G$ ಆದರೆ, $G$ ಯನ್ನು ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಏಕಕ ಸದಿಶಗಳು ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ ಆದರೆ, $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ ಇದ್ದಾಗ $\tan^{-1}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right) = 2\sin^{-1} x$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. $Z_r = cis\left(\frac{\pi}{2^r}\right)$ ಆದರೆ, $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots\ldots \infty = -1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $y = \sin\left(2\sin^{-1} x\right)$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶಕರೇಖೆಯು ಬಿಂದುವಿನ $x$-ನಿರ್ದೇಶಕದ ಎರಡರಷ್ಟು ಇದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $x$ ನ ಸಾಪೇಕ್ಷ $\cos\sqrt{x}$ ನೊಂದಿಗೆ ಸಮಾಕಲನ ( Integrate ) ಮಾಡಿ.

22. $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{3/4} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ಎಂಬ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಮಟ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



## ವಿಭಾಗ – C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $3 \times 5 = 15$

23. a) ಪೂರ್ಣಾಂಕ $a$ ಮತ್ತು $b$ ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ( GCD ) ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. 506 ಮತ್ತು 1155 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $a \equiv b \pmod{m}$ ಮತ್ತು $c \equiv d \pmod{m}$ ಆದರೆ, $ac \equiv bd \pmod{m}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

24. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು $a = b = c$ ಇದ್ದಾಗ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ತಾಳೆ ಮಾಡಿ. 5

25. ಗಣ $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \Big/ \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \in R \end{matrix} \right\}$ ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. a) ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ $ABC$ ಯಲ್ಲಿ, ಸದಿಶ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\sum \vec{a} \times ( \vec{b} \times \vec{c} ) = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 5 = 10$

27. a) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು $x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. 3

b) ವೃತ್ತ $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 7 = 0$ ಮತ್ತು ರೇಖೆ $x - y - 1 = 0$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ( Points of intersection ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



28. a) ಅಕ್ಷ $x = 5$, ನಾಭಿಲಂಬ $= 12$ ಮತ್ತು ಚಾಲಕ $y = -4$ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದಲ್ಲಿ ಛೇದಕ ಅಕ್ಷವು ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷದ ಎರಡರಷ್ಟು ಇದ್ದಾಗ, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ( $e$ ) ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) $\cos^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi + \cos^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$ ನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $3 \times 5 = 15$

30. a) ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ $x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\log_e x$ ಅನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ. 3

b) $x = at$, $y = \frac{a}{t}$ ಆದಾಗ, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. a) $y = \sin\left(m \tan^{-1} x\right)$ ಆದರೆ,

$\left(1 + x^2\right)^2 y_2 + 2x\left(1 + x^2\right) y_1 + m^2 y = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $y = 2x^2 + 3x$ ಮತ್ತು $x + 3y = 3x^2$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ( 0, 0 ) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

[ Turn over

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



32\. a) $\int \frac{3x+5}{(x+2)^2(x-3)}\,dx$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\int \frac{\cos x}{9+4\sin^2 x}\,dx$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33\. a) $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x)$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34\. $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $x^2 = 4ay$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

## ವಿಭಾಗ – D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 10 = 20$

35\. a) $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಲು ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $x - 2y + k = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಲು, $k$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, ಕ್ಯಾಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, $A^3$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



36. a) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{4}}$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿ. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $(x+y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ. 4

37. a) ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಹೆಚ್ಚುವ ದರವು $\dfrac{2}{\pi}$ ಸೆಂ.ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗಿದೆ. ಆ ಗೋಳದ ಘನಫಲದ ಹೆಚ್ಚುವ ದರವನ್ನು ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಹೆಚ್ಚುವ ದರವನ್ನು (i) ಅದರ ಘನಫಲವು $\dfrac{32\pi}{3}$ c.c. ಇದ್ದಾಗ, (ii) ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $100\,\pi$ ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\sin 7\theta \sin 5\theta = \sin 3\theta \sin \theta$ ಎಂಬುದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x \cos x}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) $9x^2 - 4y^2 + 18x - 8y - 31 = 0$ ದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು, ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

## ವಿಭಾಗ – E

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $1 \times 10 = 10$

39. a) $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಏಕಕ ಸದಿಶಗಳು ಆಗಿದ್ದು, $\vec{a}+\vec{b}$ ಕೂಡ ಏಕಕ ಸದಿಶವಾಗಿದೆ. ( Unit vector ) $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $\dfrac{2\pi}{3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

b) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c) $\displaystyle\int_0^{5} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}\,dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

[ Turn over

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



40\. a) ಒಂದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಸುತ್ತಳತೆಯು $l$ ಆಗಿದೆ. ವೃತ್ತಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\frac{l}{4}$ ಆದಾಗ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

b) 2520 ರ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c) $\omega$ ಒಂದರ ಒಂದು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಘನಮೂಲ ಆದರೆ,

$\left(1+\omega-\omega^2\right)^3 - \left(1-\omega+\omega^2\right)^3 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



**( English Version )**

*Instructions :* i) The question paper has *five* **Parts – A, B, C, D** and **E**. Answer all the parts.

ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks, **Part – C** carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and **Part – E** carries 10 marks.

## PART – A

Answer *all* the *ten* questions : $10 \times 1 = 10$

1. Examine whether $4x \equiv 5 \pmod 2$ has a solution. If so, find it.

2. On the set of all integers, $a * b = \sqrt{ab}$, $\forall\ a, b \in I$. Is $*$ a Binary operation ? Justify your answer.

3. What is the eccentricity of the conic whose parametric equations are $x = at^2$ and $y = 2at$ ?

4. What is the locus of the centres of the circles which cut given two circles orthogonally ?

5. Find the value of $\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

[ Turn over

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



6. If $(1 + ni)^2$ is purely imaginary find $n$.

7. $y = \tan(\log_e \sin x)$, find $\frac{dy}{dx}$.

8. If $f(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$ show that $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

9. If $\alpha, \beta, \gamma$ are the angles made by a vector with positive direction of coordinate axes, then prove that $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

10. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \cos x \, e^{\sin x} \, dx$.

## PART - B

Answer any *ten* questions : $10 \times 2 = 20$

11. If $c$ and $a$ are relatively prime and $\frac{c}{ab}$ then $\frac{c}{b}$ prove this.

12. If $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ find $A^{-1}$.

13. Define a sub-group of a group. Give an example.

14. Find the equation of circle with centre $(2, -3)$ and touching the line $3x - 4y - 8 = 0$.

15. In a group $G$ if $(ab)^2 = a^2 b^2$, $\forall\, a, b \in G$, then prove that the group is Abelian.

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



16. If $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are unit vectors such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, then find the value of $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

17. Prove that $\tan^{-1}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right) = 2\sin^{-1} x$ when $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

18. If $Z_r = cis\left(\frac{\pi}{2^r}\right)$ prove that $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots\ldots \infty = -1$.

19. If $y = \sin\left(2\sin^{-1} x\right)$ prove that $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$.

20. For the curve $y^2 = 4ax$, prove that the subtangent at any point is twice the abscissa $x$.

21. Integrate $\cos\sqrt{x}$ w.r.t. $x$.

22. Find the order and degree of the differential equation

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{3/4} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

## PART – C

I. Answer any *three* questions : $3 \times 5 = 15$

23. a) Define the greatest common divisor of two integers $a$ and $b$. Find $GCD$ of 506 and 1155. 3

b) If $a \equiv b \pmod{m}$ and $c \equiv d \pmod{m}$, then prove that $ac \equiv bd \pmod{m}$. 2

[ Turn over

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



24. Prove that $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ and verify the result when $a = b = c$. 5

25. Show that the set $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \middle/ \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \in R \end{matrix} \right\}$ is an Abelian group under matrix multiplication. 5

26. a) In any triangle $ABC$ prove projection rule by vector method. 3

b) Prove that $\sum \vec{a} \times ( \vec{b} \times \vec{c} ) = 0$. 2

II. Answer any *two* questions : $2 \times 5 = 10$

27. a) Find the condition that the circles

$x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$ and

$x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ to cut each other orthogonally. 3

b) Find the points of intersection of the circle

$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 7 = 0$ and the line $x - y - 1 = 0$. 2

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



28. a) Find the equations of the parabolas whose axis is $x = 5$, the directrix is $y = -4$ and latus rectum = 12. 3

b) In a hyperbola, if transverse axis is double the conjugate axis, find eccentricity. 2

29. a) Show that $\cos^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi + \cos^{-1}\frac{24}{25}$. 3

b) Find the general solution of $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$. 2

III. Answer any *three* of the following questions : $3 \times 5 = 15$

30. a) Differentiate $\log_e x$ w.r.t. $x$ from first principle. 3

b) $x = at$, $y = \frac{a}{t}$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$. 2

31. a) If $y = \sin\left(m\tan^{-1}x\right)$ prove that

$$\left(1 + x^2\right)^2 y_2 + 2x\left(1 + x^2\right)y_1 + m^2 y = 0.$$ 3

b) Prove that the curves $y = 2x^2 + 3x$ and $x + 3y = 3x^2$ cut each other orthogonally at ( 0, 0 ). 2

[ Turn over

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



32. a) Evaluate : $\int \frac{3x+5}{(x+2)^2(x-3)}\,dx$. 3

b) Evaluate : $\int \frac{\cos x}{9+4\sin^2 x}\,dx$. 2

33. a) If $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x)$ prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$. 3

b) Evaluate : $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$. 2

34. Find the area enclosed between the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$. 5

**PART - D**

Answer any *two* of the following questions : $2 \times 10 = 20$

35. a) Find the condition for the line $y = mx + c$ to be a tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Also find the point of contact and find the values of $k$ for which the line $x - 2y + k = 0$, touches the ellipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$. 6

b) Using Cayley-Hamilton theorem, find $A^3$ if $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. 4

36. a) Find all the fourth roots of $(-\sqrt{3} + i)$ and represent them on the Argand diagram. Also find their continued product. 6

b) Solve the differential equation $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$. 4

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



37. a) The radius of a sphere is increasing at the rate of $\frac{2}{\pi}$ cm/sec. Find the rate of increase of its volume and of its surface area when (i) its volume is $\frac{32\pi}{3}$ c.c., (ii) its surface area is $100\pi$ sq.cm. 6

b) Find the general solution of $\sin 7\theta \sin 5\theta = \sin 3\theta \sin \theta$. 4

38. a) Show that $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 6

b) Find centre, foci and lengths of latus rectum of

$9x^2 - 4y^2 + 18x - 8y - 31 = 0$. 4

**PART – E**

Answer any *one* of the following questions : $1 \times 10 = 10$

39. a) If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are unit vectors such that $\vec{a} + \vec{b}$ is also unit vector, then show that $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ and the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is $\frac{2\pi}{3}$. 4

b) Find the length of the common chord of the circles

$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ and $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$. 4

c) Evaluate $\int_0^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x}} dx$. 2

[ Turn over

www.inyatrust.com

www.inyatrust.com



40. a) The perimeter of a sector is $l$. Show that the area of sector is maximum when radius is $\frac{l}{4}$. 4

b) Find the number and sum of all positive divisors of 2520. 4

c) If $\omega$ is an imaginary cube root of unity, then prove that

$$\left(1+\omega-\omega^2\right)^3-\left(1-\omega+\omega^2\right)^3 = 0.$$ 2

www.inyatrust.com