

2012

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : तीन घण्टे]

[पूर्णांक : 200

Time allowed : Three Hours]

[Maximum Marks : 200

- नोट : (i) इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड अ तथा ब हैं । प्रत्येक खण्ड में चार प्रश्न हैं । किन्हीं पाँच प्रश्नों के इस प्रकार उत्तर दीजिए कि प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्न हों ।
- (ii) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । (प्रत्येक प्रश्न 40 अंक)
- (iii) एक प्रश्न के सभी भागों का उत्तर अनिवार्यतः एक साथ दिया जाय ।
- (iv) केवल नॉन प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर ही अनुमन्य है ।

- Note : (i) This question paper has two Sections 'A' and 'B'. Every section has four questions. Attempt any five questions such that at least two questions should be from every section.
- (ii) All questions carry equal marks of 40 each.
- (iii) The part of the same question must be answered together.
- (iv) Only non-programmable calculators are allowed.

खण्ड – अ

SECTION – A

1. (अ) तीन शहरों X, Y और Z में किसी कम्पनी के एक-एक स्टोर हैं । X तथा Y परस्पर 320 किमी. की दूरी पर हैं तथा Z की X व Y से दूरी 200 किमी. है । X तथा Y से बराबर दूरी पर एक गोदाम इस प्रकार बनाया जाना है कि गोदाम से प्रत्येक शहर के स्टोर का आवागमन समय कम से कम हो । गोदाम को कहाँ बनाया जाएगा ? 20
- (ब) उन गोलों की समीकरण निकालिए, जो कि वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ से होकर जाते हैं तथा समतल $4x + 3y = 15$ को स्पर्श करते हैं । 20
- (a) A firm has a branch store in each of the three cities X, Y and Z. X and Y are 320 km. apart from each other and Z is 200 km. from X and Y both. A godown has to be built, equidistant from X and Y, such that the time of transportation from the godown to each city is minimum. Where should the godown be built ?
- (b) Find the equations of the spheres which pass through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ and touch the plane $4x + 3y = 15$.
2. (अ) सदिश विश्लेषण का प्रयोग करके, दो अचर संख्याओं a व b का मान निकालिए, जबकि यह दिया है कि दो सतहें $ax^2 - byz = (a + 2)x$ तथा $4x^2y + z^3 = 4$ आपस में एक दूसरे को बिन्दु (1, -1, 2) पर लम्बवत् काटती हैं । 20
- (ब) अवकल समीकरण $(D^2 - 3D + 2)y = 3 \sin 2x$ का हल ज्ञात कीजिए । 20

- (a) Find the constants a and b , using vector analysis, so that the surface $ax^2 - byz = (a + 2)x$ is orthogonal to the surface $4x^2y + z^3 = 4$ at the point $(1, -1, 2)$.
- (b) Solve the differential equation $(D^2 - 3D + 2)y = 3 \sin 2x$.

3. (अ) एक शंकु को एक अर्द्धगोले के ऊपर इस प्रकार रखा जाता है कि दोनों के आधार समान हो जाते हैं। इस प्रकार से बनी हुई वस्तु एक खुरदुरी क्षैतिज मेज पर रखी हुई है। अर्द्धगोला मेज के सम्पर्क में है। इस वस्तु के संतुलन के स्थाई होने की दशा में सिद्ध कीजिए कि शंकु की अधिकतम ऊँचाई, अर्द्धगोले की त्रिज्या की $\sqrt{3}$ गुना होगी। 20

- (ब) किसी निश्चित बिन्दु O से a दूरी पर स्थित कोई कण विश्राम से O की ओर गतिमान है। जो बल कण को O की ओर खींच रहा है वह दूरी प्रति इकाई द्रव्यमान का μ गुना है। जिस माध्यम में कण गतिमान है उसका प्रतिरोध कण के वेग प्रति इकाई द्रव्यमान के वर्ग का k गुना है। जब कण O से x दूरी पर है, तो सिद्ध कीजिए कि इसके वेग का वर्ग होगा

$$\frac{\mu}{k} \left[x - a e^{2k(x-a)} + \frac{1}{2k} \{1 - e^{2k(x-a)}\} \right] \quad 20$$

- (a) A body consisting of a cone and a hemisphere on the same base, rests on a rough horizontal table, the hemisphere being in contact with the table. Show that the greatest height of the cone so that the equilibrium may be stable, is $\sqrt{3}$ times the radius of the hemisphere.

- (b) A particle moves from rest at a distance 'a' from a fixed point O under the action of a force towards O equal to μ times the distance per unit of mass. If the resistance of the medium in which it moves be k times the square of the velocity per unit mass, show that the square of its velocity when it is at a distance x from O , is

$$\frac{\mu}{k} \left[x - a e^{2k(x-a)} + \frac{1}{2k} \{1 - e^{2k(x-a)}\} \right]$$

4. (अ) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए समस्त आइगेन मान और आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए। 20

- (ब) सिद्ध कीजिए कि प्रथम और द्वितीय प्रकार के क्रिस्टोफल संकेत टेन्सर राशियाँ नहीं हैं। 20

अथवा

समाक्ष वृत्तों का एक तन्त्र पानी में इस प्रकार डूबा है कि केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा एक निश्चित गहराई पर है। सिद्ध कीजिए कि पूर्णतः डूबे हुए वृत्तीय क्षेत्रों के दाब-केन्द्र, एक परवलय पर स्थित हैं।

- (a) Find all the eigen values and eigen vectors of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) Show that Christoffel symbols (of the first and second kind) are not tensor quantities.

OR

A system of coaxial circles is immersed in water with the line of centres at a given depth. Prove that the centres of pressure of those circular areas which are completely immersed, lie on a parabola.

खण्ड – ब
SECTION – B

5. (अ) इन शब्दों को परिभाषित कीजिए : परमूटेशन, सम और विषम परमूटेशन, ट्रान्सपोजीशन, चक्रीय परमूटेशन ।

4 संकेतों 1, 2, 3, 4 पर समस्त परमूटेशन को लिखिए । E_p व O_p , क्रमशः सम व विषम परमूटेशन के समुच्चय हैं । E_p व O_p के समस्त अवयवों को लिखिए । 20

- (ब) प्रांत $\left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ के अन्तर्गत I का मान निकालिए जहाँ पर $I = \iiint (a^2b^2c^2 - b^2c^2x^2 - c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2)^{\frac{1}{2}} dx dy dz$ है । 20

- (a) **Define the terms** : permutation, even and odd permutation, transposition, cyclic permutation.

Write down all the permutations on 4 symbols 1, 2, 3, 4. Let E_p and O_p be the sets of even and odd permutations respectively. Write down all the elements of E_p and O_p .

- (b) Evaluate $I = \iiint (a^2b^2c^2 - b^2c^2x^2 - c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2)^{\frac{1}{2}} dx dy dz$ taken throughout the domain

$$\left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

6. (अ) कन्टूर समाकलन विधि से सिद्ध कीजिए 20

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cdot \cos(\sin \theta - n\theta) d\theta = \frac{2\pi}{n!}, n \text{ पूर्णांक है ।}$$

- (ब) आंशिक (पार्शियल) अवकल समीकरण $2y(z-3)p + (2x-z)q = y(2x-3)$ द्वारा निरूपित उस सतह का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 = 2x, z = 0$ से होकर जाती है । 20

- (a) By the method of Contour integration, prove that

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cdot \cos(\sin \theta - n\theta) d\theta = \frac{2\pi}{n!}, n \text{ being a positive integer.}$$

- (b) Find the equation of the surface represented by the partial differential equation $2y(z-3)p + (2x-z)q = y(2x-3)$, which passes through the circle $x^2 + y^2 = 2x, z = 0$.

7. (अ) दर्शाइए कि समीकरण $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ द्वारा निरूपित और M द्रव्यमान वाले क्षेत्र का, अपने अक्ष के सापेक्ष मोमेन्ट ऑफ इनर्शिया

$$\frac{1}{48} M a^2(3\pi - 8) \text{ है।} \quad 20$$

- (ब) द्विआयामी गति में यदि स्ट्रीम रेखाएँ, कन्फोकल संनाभि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$ हों, तो दर्शाइए कि स्ट्रीम फलन ψ है $\psi = A \log(\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}) + B$ जहाँ A, B स्थिर हैं। 20

- (a) Show that the moment of inertia of the area of mass M, bounded by $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ about its axis is

$$\frac{1}{48} M a^2(3\pi - 8).$$

- (b) In two-dimensional motion show that, if the stream lines are confocal ellipses $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$, then the stream function is $\psi = A \log(\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}) + B$, where A and B are constants.

8. (अ) दिखाइए कि $f(1) = \sqrt{2}$, $f(n+1) = \sqrt{2 f(n)}$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम 2 पर अभिसरित होता है। 20

- (ब) निम्नलिखित मानों के लिए तीन डिग्री वाले बहुपद को ज्ञात कीजिए : 20

$$x : 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$f(x) : 1 \quad 0 \quad 1 \quad 10$$

इस प्रकार से फलन $f(4)$ का मान निकालिए।

- (a) Show that the sequence defined by $f(1) = \sqrt{2}$, $f(n+1) = \sqrt{2 f(n)}$ converges to 2.

- (b) Find the cubic polynomial which takes the following values :

$$x : 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$f(x) : 1 \quad 0 \quad 1 \quad 10$$

Hence or otherwise find $f(4)$.