

2002
MATHEMATICS
Paper I

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in English and in Kannada.

Answers must be written in the medium specified (English or Kannada) in the Admission Ticket issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for this purpose. No credit will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Ticket.

Answer any *five* questions.

All questions carry equal marks.

ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸೂಚನೆಗಳ ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

[Turn over

1. (a) Is the vector $\alpha = (2, -5, 3)$ in $V_3(\mathbb{R})$ a linear combination of vectors $\alpha_1 = (1, -3, 2)$, $\alpha_2 = (2, -4, -1)$ and $\alpha_3 = (1, -5, 7)$?
- (b) Set up the linear transformation $Y = AX$ which carries E_1 into $Y_1 = (1, 2, 3)^t$ and E_3 into $Y_3 = (2, 1, 3)^t$. Also find the images of $X_1 = (1, 1, 1)^t$, $X_2 = (3, -1, 4)^t$ and $X_3 = (4, 0, 5)^t$.
- (c) Given $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, compute A^{-2} and A^4 .

2. (a) Reduce the symmetric matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ to canonical form.

(b) Prove that the relation of similarity is an equivalence relation in the set of all $n \times n$ matrices over a field F .

(c) Let A be an $m \times n$ matrix with real entries. Prove that $A = 0$ (null matrix) if and only if the trace $(A^T A) = 0$.

3. (a) Define positive definite and positive semi-definite matrix. Show that

$$\bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & 3-i & 11 \end{bmatrix} X$$

is positive definite.

- (b) Determine the characteristic roots and associated invariant vectors of

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (c) Show that the Hermitian matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ can be

written as $B + iC$, where B is real and symmetric and C is real and skew symmetric.

6. (a) $V_3(\mathbb{R})$ ನಲ್ಲಿ $\alpha_1 = (1, -3, 2)$, $\alpha_2 = (2, -4, -1)$ ಮತ್ತು $\alpha_3 = (1, -5, 7)$ ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಏಕಘಾತ ಸಂಚಯ $\alpha = (2, -5, 3)$ ಸದಿಶ ಆಗಿರುವುದೆ ?
- (b) $Y_1 = (1, 2, 3)'$ ನಲ್ಲಿ E_1 ಮತ್ತು $Y_3 = (2, 1, 3)'$ ನಲ್ಲಿ E_3 ಗಳನ್ನು ಒಯ್ಯುವ $Y = AX$ ರೇಖೀಯ ರೂಪಾಂತರಣವನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಮಾಡಿ. $X_1 = (1, 1, 1)'$, $X_2 = (3, -1, 4)'$ ಮತ್ತು $X_3 = (4, 0, 5)'$ ಗಳ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) ಕೊಟ್ಟಿರುವ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ನಿಂದ A^{-2} ಮತ್ತು A^4 ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ.

7. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ಸಮಮಿತಿ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ವಿಹಿತ ರೂಪಕ್ಕೆ ಕುಗ್ಗಿಸಿ.

- (b) F ಕ್ಷೇತ್ರದ ಮೇಲೆ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಾದೃಶ್ಯ ಸಂಬಂಧವು ಒಂದು ತುಲ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- (c) A ಯು ವಾಸ್ತವಿಕ ಪ್ರವಿಷ್ಟಿಯಿಂದ ಕೂಡಿದ $m \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಅನುರೇಖೆ $(A^T A) = 0$ ಆದರೆ ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಅದರಲ್ಲಿ $A = 0$ (ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. (a) ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕ ಅರೆ-ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

$$\bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & 3-i & 11 \end{bmatrix} X \text{ ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ರ ಅಭಿಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲ ಮತ್ತು ಸಹಚಾರಿ ನಿಶ್ಚರ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಿ.

- (c) B ಯು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮತ್ತು ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದ್ದು C ಯು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದ್ದಾಗ

ಹರ್ಮೀಷಿಯನ್ ಮಾತೃಕೆ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ ಯನ್ನು $B + iC$ ಎಂದು ಬರೆಯು

ಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[Turn over

4. (a) Gas is escaping from a spherical balloon at the rate of 2 cubic cm per sec. How fast is the surface area shrinking when the radius is 16 cm ?
- (b) Trace the curve $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$.
- (c) Find the area bounded by the curve $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.
5. (a) Find the asymptotes of the curve $x^2 y^2 - x^2 y - 2xy^2 + x + y + 1 = 0$.
- (b) Prove that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.
- (c) Using double integration, find the centre of gravity of a lamina in the shape of a quadrant of the curve $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, the density being $\rho = kxy$, where k is a constant.
6. (a) Find the equation of the parabola with focus at $(1, -1)$ and with $3x - 4y = 2$ as its directrix. Also find the latus rectum.
- (b) Find the equation of the pair of lines through the origin perpendicular to the lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.
- (c) A point moves so that its distance from the point $(4, 0)$ is always one half its distance from the line $x - 16 = 0$. Show that the equation of its locus is an ellipse.

4. (a) ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಲೂನಿನಿಂದ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 2 ಫು.ಸಂ.ಮೀ. ದರದಲ್ಲಿ ಗ್ಯಾಸ್ ಹೊರಬರುತ್ತಿದೆ. ತ್ರಿಜ್ಯವು 16 ಸಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಾಗ ಎಷ್ಟು ವೇಗವಾಗಿ ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕುಗ್ಗುತ್ತಿದೆ ?
- (b) $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$ ವಕ್ರವನ್ನು ರೇಖಿಸಿ.
- (c) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ ನಿಂದ ಸುತ್ತುವರಿದಿರುವ ವಕ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. (a) $x^2 y^2 - x^2 y - 2xy^2 + x + y + 1 = 0$ ವಕ್ರದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (b) $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- (c) ದ್ವಿಸಮಕೋನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು k ಯು ನಿಯತವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಘನತ್ವ $\rho = kxy$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ ವಕ್ರದ ವೃತ್ತಪಾದದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪಟಲಕ್ಕೆ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. (a) $(1, -1)$ ನಾಭಿಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಅದರ ನಿಯತ $3x - 4y = 2$ ದೊಂದಿಗೆ ಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆ ಅದರ ನಾಭಿಲಂಬವನ್ನು ಸಹಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (b) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರಕ್ಷೋಭ ಲಂಬದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ಜತೆ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (c) ಒಂದು ಬಿಂದುವು $(4, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಯಾವಾಗಲೂ $x - 16 = 0$ ರೇಖೆಯಿಂದ ಒಂದೂವರೆಯಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಬಿಂದು ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. (a) Find the equation of the two spheres which touch the z -axis and pass through the circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 1, z = 0$.
- (b) Find the equations in symmetric form for the line of intersection of the planes $x - y + 3z = 2$ and $3x + y + z = 2$.
- (c) Find the equation of the sphere having its centre on the plane $4x - 5y - z = 3$ and passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 4z + 8 = 0$,
 $x - 2y + z = 8$.
8. (a) Solve $e^y \cos x \, dy + (e^y + 1) \sin x \, dx = 0$.
- (b) Solve $y'' = x + xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (c) A boat is rowed with a velocity μ directly across a stream of width a . If the velocity of the current is directly proportional to the product of the distances from the two banks, find the path of the boat and the distance downstream to the point where it lands.
9. (a) Solve $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^4$
- (b) Solve $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{12 \log x}{x^2}$.
- (c) Solve $(3x + 2)^2 y'' + 5(3x + 2) y' - 3y = x^2 + x + 1$

7. (a) z -ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 1, z = 0$ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- (b) $x - y + 3z = 2$ ಮತ್ತು $3x + y + z = 2$ ಎಂಬ ಸಮತಲಗಳ ಪ್ರತಿಭೇದ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಮಮಿತಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (c) $4x - 5y - z = 3$ ಸಮತಲವಿರುವ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 4z + 8 = 0, x - 2y + z = 8$ ವೃತ್ತದ ಮೂಲದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. (a) ಬಿಡಿಸಿ: $e^y \cos x \, dy + (e^y + 1) \sin x \, dx = 0$.
- (b) ಬಿಡಿಸಿ: $y'' = x + xy', y(0) = 1, y'(0) = 0$.
- (c) ಒಂದು ದೋಣೆಯು μ ವೇಗದಲ್ಲಿ a ಅಡ್ಡಗಲವಿರುವ ನೀರಿನ ಪ್ರವಾಹದ ಎದುರಲ್ಲಿ ನೇರವಾಗಿ ಸಂಚರಿಸುತ್ತಿದೆ. ನೀರಿನ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವು α ಎರಡು ನದೀ ತೀರಗಳ ಗುಣನ ಫಲಗಳ ದೂರಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿ ಸಮಾನುಪಾತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ದೋಣೆಯ ಪಥ ಮತ್ತು ಅದು ನಿಲ್ಲುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅನುಪ್ರವಾಹದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. (a) ಬಿಡಿಸಿ: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^4$
- (b) ಬಿಡಿಸಿ: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{12 \log x}{x^2}$
- (c) ಬಿಡಿಸಿ: $(3x + 2)^2 y'' + 5(3x + 2) y' - 3y = x^2 + x + 1$

10. a) Constant forces $\vec{P} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$ and $\vec{Q} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ act on a particle. Determine the work done when the particle is displaced from A to B, the position vectors of A and B being $4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ and $6\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ respectively.

- (b) Apply Stoke's theorem to prove that

$$\int_C (y \, dx + z \, dy + x \, dz) = -2\sqrt{2} \pi a^2 .$$

where, C is the curve given by

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0, \quad x + y = 2a$$

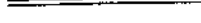
and begins at the point $(2a, 0, 0)$ and goes at first below the z-plane.

- (c) Prove that the direct product of the two tensors result in a new tensor of rank equal to the sum of ranks of there tensors.
11. (a) Three forces P, Q, R act along the sides of the triangle formed by the lines $x + y = 1, y - x = 1$ and $y = 2$. Find the equation to the line of action of the resultant.
- (b) A string of length a forms the shorter diagonal of a rhombus formed of four uniform rods each of length b and weight W , which are hinged together. If one of the rods be supported in a horizontal position, prove that the tension of the string is $\frac{2W(2b^2 - a^2)}{b\sqrt{4b^2 - a^2}}$.
- (c) A particle of mass m is falling under gravity in a medium whose resistance equals μ times the velocity. If the particle be released from rest, find the distance described in time t .

- 10 a) ಒಂದು ಕಣದ ಮೇಲೆ $\vec{P} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$ ಮತ್ತು $\vec{Q} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ನಿಯತ ಬಲಗಳು ಕ್ರಿಯೆಪಡಿಸುತ್ತಿವೆ. A ಯಿಂದ B ಗೆ ಆ ಕಣವು ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟಗೊಂಡಾಗ ಹಾಗೂ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಸ್ಥಿತಿ ಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ಮತ್ತು $6\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ನಡೆದ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಿ.
- (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0$, $x + y = 2a$ ಗಳು c ವಕ್ರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಮತ್ತು $(2a, 0, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಮತ್ತು ಮೊದಲು z -ಸಮತಲದ ಕೆಳಗೆ ಹೋದಾಗ
- $$\int_C (y dx + z dy + x dz) = -2\sqrt{2} \pi a^2$$
- ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಸ್ಕೋರ್ಕ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ.
- (c) ಎರಡು ಪ್ರದಿಶಗಳ ನೇರ ಗುಣನ ಫಲದಿಂದಾದ ಹೊಸ ಪ್ರದಿಶದ ಶ್ರೇಣಿ (Rank) ಯಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಪ್ರದಿಶಗಳ ಶ್ರೇಣಿಗಳ (Ranks) ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿ ಫಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- 11 (i) $x + y = 1$, $y - x = 1$ ಮತ್ತು $y = 2$ ರೇಖೆಗಳು ರೂಪಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳೊಂದಿಗೆ P, Q, R ಬಲಗಳು ಕ್ರಿಯೆಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಪರಿಣಾಮ ಕ್ರಿಯಾ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (ii) W ತೂಕವಿರುವ ಮತ್ತು b ಉದ್ದವಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಏಕರೂಪ ಸರಳುಗಳಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ a ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ತಂತಿಯಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಕರ್ಣವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕೋನಗಳು ಕಿಲುಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸರಳು ಸಮತಲ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ ತಂತಿಯ ಕರ್ಷಣವು $\frac{2W(2b^2 - a^2)}{b\sqrt{4b^2 - a^2}}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- (c) m ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಕಣವು ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯಿಂದಾಗಿ ಸಾಧನದ ಮಧ್ಯೆ ಬಿತ್ತು ಮತ್ತು ಆ ಸಾಧನದ ಪ್ರತಿರೋಧವು ವೇಗದ μ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದು. ಕಣವನ್ನು ಉಳಿದವುಗಳಿಂದ ವಿಮೋಚನೆಗೊಳಿಸಿದರೆ ಕಾಲ t ಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ.

12. (a) A person falls by means of a parachute from a height of 900 metres in 150 seconds. Taking the resistance to vary as the square of the velocity, determine the limiting velocity.
- (b) Prove that the horizontal line through the centre of pressure of rectangle immersed in a liquid with one side in the surface divides the rectangle into two parts, the fluid pressures on which are in the ratio 4 : 5.
- (c) A conical glass is filled with water and placed in an inverted position upon a table. Show that the resultant vertical thrust of the water on the glass is two-thirds that on the table.

12. (a) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ಪ್ಯಾರಾಚೂಟ್‌ನಿಂದ 900 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದಿಂದ ಬಿದ್ದು 150 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಸೇರುತ್ತಾನೆ. ವೇಗದ ವರ್ಗವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಲು ಪ್ರತಿರೋಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸೀಮಾಂತ ವೇಗವನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಿ.
- (b) ಆಯತದ ಒತ್ತಡ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹೋಗಿರುವ ಸಮತಲ ರೇಖೆಯ ದ್ರವದಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿದ್ದು ಉಪರಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವವು ಆಯತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಹಾಗೂ ದ್ರವದ ಒತ್ತಡಗಳ ಅನುಪಾತವು 4 : 5 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- (c) ಒಂದು ಶಂಖುವಿನಾಕೃತಿಯ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದೊಳಗೆ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿ ಅದನ್ನು ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿಲೋಮಿತ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ (Inverted position) ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಆ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಪರಿಣಾಮ ಉರ್ಧ್ವ ಪ್ರಸಾರವು (Thrust) ಮೇಜಿನ ಮೇಲಿನದಕ್ಕಿಂತ ಎರಡನೇ ಮೂರು ಭಾಗದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



2002
MATHEMATICS
Paper II

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in English and in Kannada.

Answers must be written in the medium specified (English or Kannada) in the Admission Ticket issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for this purpose. No credit will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Ticket.

Answer any *five* questions, choosing at least *two* from each Section.

All questions carry equal marks.

ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸೂಚನೆಗಳ ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

[Turn over

SECTION - A

1. (a) Show that the four fourth roots of unity form a multiplicative group.
 (b) Prove that any sub-group of a cyclic group is cyclic.
 (c) If G is a finite Abelian group and a positive integer k divides $o(G)$, prove that G contains a subgroup of order k .
2. (a) If in a ring R with unity, $(xy)^2 = x^2y^2$ for all $x, y \in R$, prove that R is commutative.
 (b) Show that for any field F , the ring of polynomials $F[x]$ is a Principal Ideal Domain (PID).
 (c) Let R be a Euclidean ring. Let a and b be two non-zero elements in R . Prove that if b is not a unit in R , then $d(ab) > d(a)$.
3. (a) Test the convergence of

$$\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \dots + \frac{1}{\log n} + \dots$$

 (b) Prove that f is continuous on a metric space S if and only if f is continuous on every compact subset of S .
 (c) Evaluate the integral

$$\iint xy \, dx \, dy$$
 over the positive quadrant of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.
4. (a) (i) Check the uniform convergence of $\tan x$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 (ii) Find the maxima of $y = x^3 - 7x^2 + 2$ in $[0, 5]$.
 (b) If $f \in R[a, b]$, then prove that

$$\int_a^b f = - \int_b^a f.$$

 (c) Examine the convergence of

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2} (1-x)^{1/3}}.$$
5. (a) Extend Cauchy's theorem concerned with vanishing of integrals along closed curves to a multiply connected region (region with holes where the function is not defined).
 (b) Find the Taylor's series to represent $\frac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$ about 0.
 (c) Prove that if a power series in z is convergent at $z = z_1$, then it converges absolutely in $|z| < |z_1|$.

ವಿಭಾಗ - ಎ

1. (a) ತತ್ಸಮಕದ (Unity) ನಾಲ್ಕು ನಾಲ್ಕನೇ ಮೂಲಗಳು ಒಂದು ಗುಣನಾತ್ಮಕ ಸಮೂಹವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- (b) ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಸಮೂಹದ ಯಾವುದೇ ಉಪಸಮೂಹವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- (c) G ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಮೂಹವಾದರೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ k ಯು $o(G)$ ಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, G ಯು ಸಮೂಹಾಂಕ k ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮೂಹವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. (a) ಎಲ್ಲಾ $x, y \in R$ ಗಳಿಗೆ R ಉಂಗುರದಲ್ಲಿ ತತ್ಸಮಕದೊಂದಿಗೆ $(xy)^2 = x^2 y^2$ ಆದರೆ, R ಕ್ರಮ ವಿನಿಮೇಯ (Commutative) ವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- (b) ಯಾವುದೇ ಕ್ಷೇತ್ರ F ಗಾಗಿ ಬಹುಪದಗಳ ಉಂಗುರ $F[x]$ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಜಾವಳಿ ಪ್ರಾಂತ (PID) ವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
- (c) R ಒಂದು ಯುಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಉಂಗುರವಾಗಿರಲಿ. a ಮತ್ತು b ಗಳೆರಡೂ R ನಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯೇತರ ಅವಯವವಾಗಿರಲಿ. b ಯು R ನಲ್ಲಿ ಏಕಕವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $d(ab) > d(a)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
3. (a) $\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \dots + \frac{1}{\log n} + \dots$ ನ ಅಭಿಸರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
- (b) S ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಹಿತೆ (Compact) ಉಪಸಮುಚ್ಚಯದ ಮೇಲೆ f ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದರೆ ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಆದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೂರಿಕ ಸಮಷ್ಟಿ (Metric space) S ಮೇಲೆ f ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- (c) $x^2 + y^2 = a^2$ ವೃತ್ತದ ಧನಾತ್ಮಕ ವೃತ್ತಪಾದದ ಮೇಲೆ $\iint xy \, dx \, dy$ ಸಮಾಕಲವನ್ನು ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ.
4. (a) (i) $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ ನಲ್ಲಿ $\tan x$ ನ ಏಕಸಮಾನ ಅಭಿಸರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
- (ii) $[0, 5]$ ನಲ್ಲಿ $y = x^3 - 7x^2 + 2$ ರ ಉಚ್ಚಿಷ್ಟ (Maxima) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (b) $f \in R[a, b]$ ಆದರೆ, $\int_a^b f = - \int_b^a f$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
- (c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2} (1-x)^{1/3}}$ ರ ಅಭಿಸರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
5. (a) ಒಂದು ಬಹುಸಂಬಂಧಿತ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ (ಪ್ರಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸದಿರುವ ರಂಧ್ರಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಪ್ರದೇಶ) ಸಮಾಕಲಗಳನ್ನು ಸಮೀಪದ ವಕ್ರಗಳೊಂದಿಗೆ ಅದೃಶ್ಯ ಮಾಡಿ ಕಾಶೆಯ (Cauchy's) ನಿಯಮವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.
- (b) 0 ಕುರಿತು $\frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$ ಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಟೈಲರನ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (c) $z = z_1$ ನಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಘಾತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ (Power series) z ಅಭಿಸಾರಿಯಾದರೆ (Convergent) $|z| < |z_1|$ ನಲ್ಲಿ ಇದು ನಿರ್ಬಂಧವಿಲ್ಲದೇ ಅಭಿಸರಿತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

[Turn over

6. (a) Evaluate $\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 4} dz$ if C is the circle of unit radius with centre at

(i) $z = 2$, (ii) $z = -2$ and (iii) $z = 0$.

(b) State and prove Cauchy's residue theorem.

(c) Prove that $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos^2 \alpha \sin(x^2 \sin 2\alpha) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin \alpha$.

7. (a) Find the differential equation of all planes which are at a constant distance from the origin.

(b) Solve : $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$.

(c) Use Charpit's method to solve $(p^2 + q^2)y = qz$.

8. (a) Solve : $p^2 + q^2 = z^2(x^2 + y^2)$.

(b) Solve : $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2e^{2x} + 3x^2 y$.

(c) Solve :

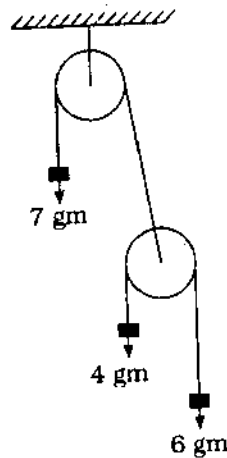
(i) $p^3 + q^3 = 27z$

(ii) $yp = 2xy + \log q$.

6. (a) (i) $z = 2$, (ii) $z = -2$ ಮತ್ತು (iii) $z = 0$ ಕೇಂದ್ರಗಳೊಂದಿಗೆ C ಯು ಏಕಕ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತವಾದರೆ $\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 4} dz$ ನ ಮೂಲ್ಯಾಂಕನವನ್ನು ಮಾಡಿ.
- (b) ಕಾಶಿಯ (Cauchy's) ಅವಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ.
- (c) $\int_0^{\infty} e^{-x^2 \cos^2 \alpha} \sin(x^2 \sin 2\alpha) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin \alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
7. (a) ಪ್ರಕ್ಷೋಭ (Origin) ದಿಂದ ಒಂದು ನಿಯತ ದೂರದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಮತಲಗಳ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (b) ಬಿಡಿಸಿ: $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$.
- (c) $(p^2 + q^2)y = qz$ ಅನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಚಾರ್ಪಿಟ್‌ನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.
8. (a) ಬಿಡಿಸಿ: $p^2 + q^2 = z^2(x^2 + y^2)$.
- (b) ಬಿಡಿಸಿ: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2e^{2x} + 3x^2 y$.
- (c) ಬಿಡಿಸಿ:
- (i) $p^3 + q^3 = 27z$
- (ii) $yp = 2xy + \log q$.

SECTION - B

9. (a) Using Lagrange's equations obtain the differential equations for planetary motion.
- (b) Calculate the moment of inertia of a uniform elliptic lamina about (i) the tangent at the extremity of the major axis and (ii) the axis through the centre of the lamina and perpendicular to the plane.
- (c) A pulley system is given as shown in the diagram. Discuss the motion of the system using Lagrange's method when the pulley wheels have negligible masses and moments of inertia and their wheels are frictionless.



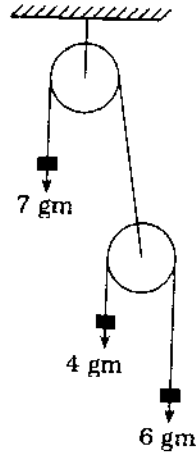
10. (a) Show that the motion of a particle of mass m projected vertically upwards with a velocity u in a medium whose resistance varies as the square of the speed is governed by

$$\log \left(\frac{V^2 + u^2}{V^2 + v^2} \right) = \frac{2g}{V^2} x,$$

where x is the coordinate in which the motion takes place, $V = \sqrt{\frac{g}{\mu}}$ is the terminal velocity and μv^2 is the magnitude of resistance per unit mass.

ವಿಭಾಗ - ಬಿ

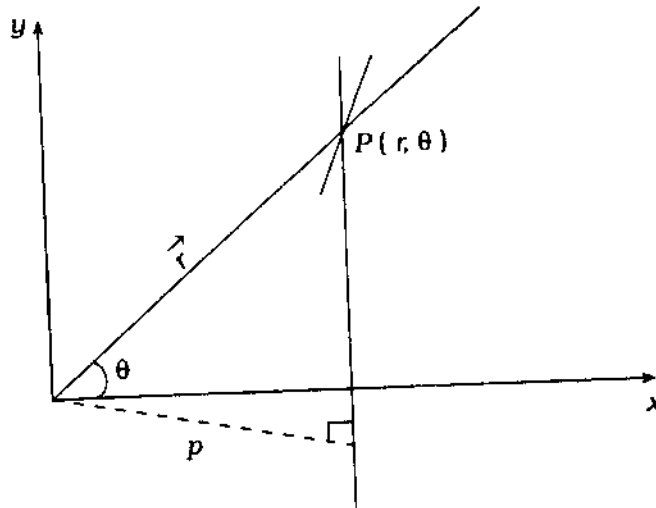
9. (a) ಗ್ರಹಗತಿಗಾಗಿ (Planetary motion) ಲ್ಯಾಗ್ರಾಂಜನ್ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.
- (b) (i) ದೀರ್ಘ ಅಕ್ಷದ ಅಗ್ರಾಂಗ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, ಮತ್ತು
(ii) ಪಟಲ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ದೀರ್ಘವೃತ್ತೀಯ ಪಟಲದ ಜಡತ್ವ ಅಫೂರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ.
- (c) ಒಂದು ಕಪ್ಪಿ (Pulley) ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಕಪ್ಪಿಯ ಚಕ್ರಗಳ ಮತ್ತು ಜಡತ್ವದ ಅಫೂರ್ಣಗಳು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಬಹುದಾದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಆ ಚಕ್ರಗಳು ಘರ್ಷಣೆಯಿಲ್ಲದ್ದಾಗಿದೆ. ಲ್ಯಾಗ್ರಾಂಜನ್ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗತಿ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.



10. (a) x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವಾಗಿದ್ದು ಇದರಲ್ಲಿ ಗತಿಯುಂಟಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $V = \sqrt{\frac{g}{\mu}}$ ಅಂತಿಮ ವೇಗ ಹಾಗೂ μu^2 ಪ್ರತಿರೋಧದ ಪ್ರತಿ ಘಟಕ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಗೆ ಪರಿಮಾಣ ಆದಾಗ, ವೇಗವನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸುವ $\log\left(\frac{V^2 + u^2}{V^2 + u^2}\right) = \frac{2g}{V^2} x$ ನ ವರ್ಗವಾಗಿ ಬದಲಿಸುವ ಪ್ರತಿರೋಧದ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿನ u ವೇಗದೊಂದಿಗೆ, m ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಕಣದ ಚಲನೆಯು ಶೀರ್ಷಾಭಿಮುಖವಾಗಿ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

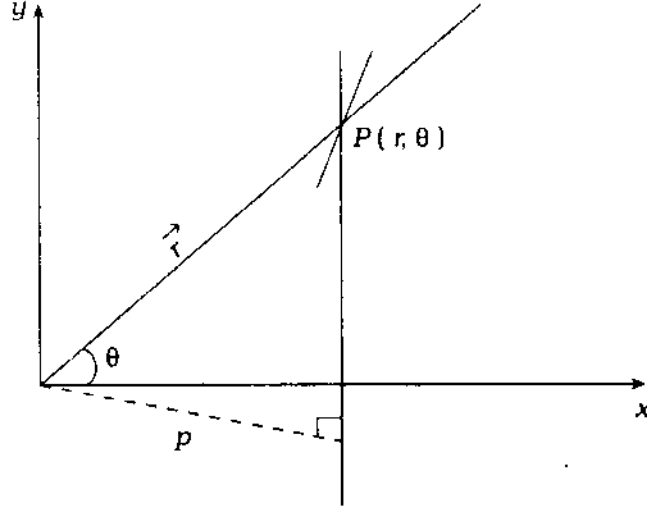
[Turn over

- (b) Investigate the motion of a particle moving under an attractive inverse square law. Given that $\frac{mh^2}{p^2} \frac{dp}{dn} = -F$ is the pedal equation of the orbit under a central force (where $h = r^2 \dot{\theta}$).



- (c) Discuss D'Alembert's Principle.
11. (a) Give an example for two-dimensional potential flow. Discuss how the stream function satisfying Laplace equation that arises in Hydrodynamics.
- (b) Show that the potential function
- $$\phi = \left(\frac{1}{3}\right)x^3 - x^2 - xy^2 + y^2$$
- describes the irrotational flow. Determine the stream function and the velocity vector at (1, 2).
12. (a) Draw the flow net for a uniform two-dimensional flow with a constant velocity $u = c$.
- (b) What arrangement of sources and sinks will give rise to the function
- $$w = \log\left(z - \frac{a^2}{z}\right)?$$

- (b) ಒಂದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಬಲದ ($h = r^2 \theta$ ಆದಾಗ) ಕಕ್ಷೆಯ ಪಾದ ಸಮೀಕರಣ $\frac{mh^2}{p^2} \frac{dp}{dn} = -F$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಒಂದು ಆಕರ್ಷಕ ವಿಲೋಮ ವರ್ಗ ನಿಯಮದಂತೆ ಚಲಿಸುವ ಒಂದು ಕಣದ ಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.



(c) ಡಿ'ಅಲಂಬರ್ಟನ ನಿಯಮವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.

11. (a) ಎರಡು-ವಿಮೀಯ (Dimensional) ವಿಭವ ಪ್ರವಾಹಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ. ದ್ರವಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬರುವ ಧಾರಾ ಕಾರ್ಯವು ಹೇಗೆ ಲಾಪ್ಲಾಸ್ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.
- (b) ವಿಭವ ಫಲನ $\phi = \left(\frac{1}{3}\right)x^3 - x^2 - xy^2 + y^2$ ಆಫೂರ್ಣ ಪ್ರವಾಹವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (1, 2) ರಲ್ಲಿ ಧಾರಾ ಫಲನ ಮತ್ತು ವೇಗ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.
12. (a) ಒಂದು ಏಕಸಮಾನ ವೇಗ $u = c$ ಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಎರಡು-ವಿಮೀಯ ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ಪ್ರವಾಹ ಜಾಲವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ.
- (b) $w = \log \left(z - \frac{a^2}{z} \right)$ ಫಲನಕ್ಕೆ ಯಾವ ಉದ್ಗಮಗಳು ಮತ್ತು ಅಭಿಗಮಗಳ (Sources and sinks) ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಉತ್ಪತ್ತಿಸುತ್ತದೆ ?

[Turn over

13. (a) Fit a cubic spline function for the following data :

$x :$	0	1	3
$f :$	1	2	4

- (b) Evaluate $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ by using (i) Trapezoidal rule, (ii) Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, (iii) Simpson's $\frac{3}{8}$ rule, (iv) Weddle's rule and compare the result with its actual value. [Divide the interval (0, 6) into six parts each of width $h = 1$].
- (c) The angular displacement at different times is given by the following table. Find the angular velocity and angular acceleration at $t = 2.5$ sec.

$t :$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\theta :$	0	1.01	2.16	3.81	6.56	11.25

14. (a) Consider the function $f(x) = e^x$ at the points $x = 0, 0.5, 1$. Using numerical differentiation, find $f'(0)$. Estimate the error bound and compare it with the actual error.
- (b) A slider in a machine moves along a fixed straight rod. Its distance x cm along the rod is given below for various values of the time t seconds. Find the velocity of the slider and its acceleration when $t = 0.3$ sec.

$t :$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$x :$	30.13	31.62	32.87	33.64	33.95	33.81	33.24

- (c) Discuss the convergence criteria for Newton-Raphson's method.

13. (a) ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಘನ ಸ್ಪೈನ್ಯ್ (Spline) ಫಲನವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿ:

$x :$	0	1	3
$f :$	1	2	4

- (b) (i) ಸಮಲಂಬ ನಿಯಮ (ii) ಸಿಂಪ್ಸನ್‌ನ $\frac{1}{3}$ ನಿಯಮ (iii) ಸಿಂಪ್ಸನ್‌ನ $\frac{3}{8}$ ನಿಯಮ (iv) ವೆಡ್ಜ್‌ನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ ಅನ್ನು ಮೌಲ್ಯಾಂಕನ ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ವಾಸ್ತವಿಕ

ಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿ. [(0, 6) ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಆರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಅಡ್ಡಗಲ $h = 1$ ಇರಬೇಕು.]

- (c) ವಿವಿಧ ಕಾಲಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನೀಯ ವಿಸ್ತಾಪನೆಯನ್ನು (Displacement) ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕೋನೀಯ ವೇಗ ಮತ್ತು ಕೋನೀಯ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು $t = 2.5$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$t :$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\theta :$	0	1.01	2.16	3.81	6.56	11.25

14. (a) $x = 0, 0.5, 1$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $f(x) = e^x$ ಫಲನವನ್ನು ಪರ್ಯಾಲೋಚಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಅವಕಲನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $f'(0)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರಮಾದ ಗಡಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ವಾಸ್ತವಿಕ ಪ್ರಮಾದದೊಂದಿಗೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿ.

- (b) ಒಂದು ಯಂತ್ರದ ಸ್ಪೈಡರ್ ಸ್ಥಿರ ನೇರ ಸರಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ದೂರ ಸರಳಿನೊಂದಿಗೆ x ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದು ಅದನ್ನು ವಿವಿಧ ಮೂಲ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಲ t ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. $t = 0.3$ ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಸ್ಪೈಡರ್‌ನ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$t :$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$x :$	30.13	31.62	32.87	33.64	33.95	33.81	33.24

- (c) ಮ್ಯಾಟಿನ್-ರಾಫ್‌ಸನ್‌ನ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಅಭಿಸರಣೆ ನಿಕಷವನ್ನು (Criteria) ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿ.

15. (a) Calculate the mean deviation from median for the following :

Rs. per day	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
No. of families :	2	9	11	14	20	25	24	23	20	16	5

- (b) Let X and Y be two random variables taking three values $-1, 0, 1$ and having the joint probability distribution given below :

X →	-1	0	1	Total
Y ↓				
-1	0	0.1	0.1	0.2
0	0.2	0.2	0.2	0.6
1	0	0.1	0.1	0.2
Total	0.2	0.4	0.4	1

- (i) Given that $Y = 0$, what is the conditional probability distribution of X ?
- (ii) Show that X and Y have different expectations.
- (iii) Prove that X and Y are uncorrelated.
- (iv) Find $Var X$ & $Var Y$.
16. (a) Find an optimal solution to the following L.P.P. by computing all basic solutions and then finding one that maximizes the objective function :

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4.$$

- (b) In a factory, there are six jobs to perform and each should go through two machines A and B in the order A, B . The processing timings in (hours) for the jobs are given below. Determine the sequence for performing the jobs that would minimize the total elapsed time T . What is the value of T ?

Job :	J₁	J₂	J₃	J₄	J₅	J₆
Machine A :	1	3	8	5	6	3
Machine B :	5	6	3	2	2	10

15. (a) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಮಾದ್ಯಕದಿಂದ ಮಾಧ್ಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ:

ರೂ. ಒಂದು ದಿನಕ್ಕೆ:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:	2	9	11	14	20	25	24	23	20	16	5

- (b) ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು - 1, 0, 1 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು X ಮತ್ತು Y ಎರಡು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಭವನೀಯತಾ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$X \rightarrow$	-1	0	1	ಒಟ್ಟು
$Y \downarrow$				
-1	0	0.1	0.1	0.2
0	0.2	0.2	0.2	0.6
1	0	0.1	0.1	0.2
ಒಟ್ಟು	0.2	0.4	0.4	1

- (i) ಕೊಟ್ಟಿರುವ $Y = 0$ ಯಂತೆ, X ನ ಪ್ರತಿಬಂಧ (Conditional) ಸಂಭವನೀಯತಾ ವಿತರಣೆಯೇನು ?
 (ii) X ಮತ್ತು Y ಗಳು ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರತ್ಯಾಸಕ್ತಿಗಳನ್ನು (Expectations) ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
 (iii) X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಅಸಹಸಂಬಂಧಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
 (iv) $\text{Var } X$ ಮತ್ತು $\text{Var } Y$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. (a) ಎಲ್ಲಾ ಆಧಾರಭೂತ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ವಸ್ತುನಿಷ್ಠ ಫಲನವನ್ನು ಅಧಿಕತಮಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ ಈ ಕೆಳಗಿನ L.P.P. ಗೆ ಒಂದು ಇಷ್ಟತಮ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\text{ಅಧಿಕಗೊಳಿಸಿ, } Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4.$$

- (b) ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಆರು ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಯಂತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ A, B ಶ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪೂರೈಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಕೆಲಸಗಳ ಪ್ರಕ್ರಮಣ ಕಾಲಗಳನ್ನು (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು ಗತಿಸಿದ ಕಾಲ T ಯನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವ ಕೆಲಸಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆಗಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಿ. T ಯ ಬೆಲೆಯೇನು ?

ಕೆಲಸ	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
ಯಂತ್ರ A :	1	3	8	5	6	3
ಯಂತ್ರ B :	5	6	3	2	2	10