Series SSO

Code No. **65/1**
कोड नं.

Roll No.
रोल नं.

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.
परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the student will read the question paper only and will not write any answer on the answer script during this period.
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।

MATHEMATICS

गणित

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

General Instructions :

(i) *All questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of* ***10*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***12*** *questions of* ***four marks*** *each and Section C comprises of* ***7*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted.*

सामान्य निर्देश :

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड स में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।

(iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।

SECTION A
खण्ड अ

Questions number 1 to 10 carry 1 mark each.

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

1. Find the value of x, if

$$\begin{pmatrix} 3x+y & -y \\ 2y-x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

x का मान ज्ञात कीजिए यदि

$$\begin{pmatrix} 3x+y & -y \\ 2y-x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Let $*$ be a binary operation on N given by $a * b = \text{HCF}(a, b)$, $a, b \in N$. Write the value of $22 * 4$.

माना $*$, N पर एक द्विआधारी संक्रिया है जो $a * b = \text{HCF}(a, b)$ द्वारा प्रदत्त है, जहाँ $a, b \in N$ है । $22 * 4$ का मान लिखिए ।

3. Evaluate :

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

4. Evaluate :

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

5. Write the principal value of $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$.

$\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मुख्य मान लिखिए ।

6. Write the value of the following determinant :

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

निम्न सारणिक का मान लिखिए :

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

7. Find the value of x from the following :

$$\begin{vmatrix} x & 4 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

निम्न से x का मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x & 4 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

8. Find the value of p if

$$(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} + p\hat{k}) = \vec{0}.$$

p का मान ज्ञात कीजिए यदि

$$(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} + p\hat{k}) = \vec{0}.$$

9. Write the direction cosines of a line equally inclined to the three coordinate axes.

उस रेखा के दिक् कोज्या लिखिए जो तीनों निर्देशांक अक्षों पर समान कोण बनाती हो ।

10. If $\vec{p}$ is a unit vector and $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot (\vec{x} + \vec{p}) = 80$, then find $|\vec{x}|$.

यदि $\vec{p}$ एक मात्रक सदिश है तथा $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot (\vec{x} + \vec{p}) = 80$ है, तो $|\vec{x}|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

SECTION B

खण्ड ब

Questions number 11 to 22 carry 4 marks each.

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

11. The length x of a rectangle is decreasing at the rate of 5 cm/minute and the width y is increasing at the rate of 4 cm/minute. When x = 8 cm and y = 6 cm, find the rate of change of (a) the perimeter, (b) the area of the rectangle.

OR

Find the intervals in which the function f given by

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi,$$

is strictly increasing or strictly decreasing.

एक आयत की लंबाई x, 5 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है । जब x = 8 सेमी और y = 6 सेमी है, तब आयत के (अ) परिमाप, (ब) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए ।

अथवा

अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x, \ 0 \le x \le 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f, निरंतर वर्धमान या निरंतर ह्रासमान है ।

12. If $\sin y = x \sin (a + y)$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a+y)}{\sin a}$.

OR

If $(\cos x)^y = (\sin y)^x$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $\sin y = x \sin (a + y)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a+y)}{\sin a}$.

अथवा

यदि $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

13. Let $f : N \rightarrow N$ be defined by

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{if } n \text{ is odd} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \quad \text{for all } n \in N.$$

Find whether the function f is bijective.

माना कि समस्त $n \in N$ के लिए

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक फलन $f : N \rightarrow N$ है ।

ज्ञात कीजिए कि क्या फलन f एकैकी आच्छादी (bijective) है ।

14. Evaluate :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$$

OR

Evaluate :

$$\int x \sin^{-1} x \, dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int x \sin^{-1} x \, dx$$

15. If $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, show that

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

यदि $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ है, तो दर्शाइए कि

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

16. On a multiple choice examination with three possible answers (out of which only one is correct) for each of the five questions, what is the probability that a candidate would get four or more correct answers just by guessing ?

एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में पाँच प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर हैं (जिनमें से केवल एक सही है) । इसकी क्या प्रायिकता है कि एक परीक्षार्थी केवल अनुमान लगाकर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर देगा ?

17. Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 1+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 1+6p+3q \end{vmatrix} = 1$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर, निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 1+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 1+6p+3q \end{vmatrix} = 1$$

18. Solve the following differential equation :

$$x\frac{dy}{dx} = y - x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\frac{dy}{dx} = y - x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

19. Solve the following differential equation :

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

20. Find the shortest distance between the following two lines :

$$\vec{r} = (1 + \lambda)\hat{i} + (2 - \lambda)\hat{j} + (\lambda + 1)\hat{k};$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}).$$

निम्न दो रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (1 + \lambda)\hat{i} + (2 - \lambda)\hat{j} + (\lambda + 1)\hat{k};$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}).$$

21. Prove the following :

$$\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}\right) = \frac{x}{2}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

OR

Solve for x :

$$2 \tan^{-1} (\cos x) = \tan^{-1} (2 \operatorname{cosec} x)$$

निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}\right) = \frac{x}{2}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

$$2 \tan^{-1} (\cos x) = \tan^{-1} (2 \operatorname{cosec} x)$$

22. The scalar product of the vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ with the unit vector along the sum of vectors $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ is equal to one. Find the value of λ.

सदिशों $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल की दिशा में मात्रक सदिश से सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का अदिश गुणनफल 1 है । λ का मान ज्ञात कीजिए ।

SECTION C

खण्ड स

Questions number 23 to 29 carry six marks each.

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

23. Find the equation of the plane determined by the points A (3, –1, 2), B (5, 2, 4) and C (–1, –1, 6). Also find the distance of the point P (6, 5, 9) from the plane.

बिन्दुओं A (3, –1, 2), B (5, 2, 4) तथा C (–1, –1, 6) द्वारा निर्धारित समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए । बिन्दु P (6, 5, 9) की इस समतल से दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

24. Find the area of the region included between the parabola $y^2 = x$ and the line $x + y = 2$.

परवलय $y^2 = x$ तथा रेखा $x + y = 2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

25. Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

26. Using matrices, solve the following system of equations :

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2z = 7$$
$$3x + y + z = 12$$

OR

Obtain the inverse of the following matrix using elementary operations :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूहों का प्रयोग कर, निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2z = 7$$
$$3x + y + z = 12$$

अथवा

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्न आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

27. Coloured balls are distributed in three bags as shown in the following table :

Bag	Colour of the ball		
	Black	White	Red
I	1	2	3
II	2	4	1
III	4	5	3

A bag is selected at random and then two balls are randomly drawn from the selected bag. They happen to be black and red. What is the probability that they came from bag I ?

तीन थैलों में रंगीन गेंदें निम्न सारणी में दर्शायी गयी तरह से आबंटित की गई हैं :

थैला	गेंद का रंग		
	काला	सफेद	लाल
I	1	2	3
II	2	4	1
III	4	5	3

एक थैला यादृच्छया चुना गया तथा उसमें से दो गेंदें यादृच्छया निकाली गईं और वह काली और लाल पाई गईं । प्रायिकता क्या है कि वे पहले (I) थैले में से निकाली गईं ?

28. A dealer wishes to purchase a number of fans and sewing machines. He has only Rs. 5,760 to invest and has a space for at most 20 items. A fan costs him Rs. 360 and a sewing machine Rs. 240. His expectation is that he can sell a fan at a profit of Rs. 22 and a sewing machine at a profit of Rs. 18. Assuming that he can sell all the items that he can buy, how should he invest his money in order to maximise the profit ? Formulate this as a linear programming problem and solve it graphically.

एक व्यापारी कुछ पंखे तथा सिलाई मशीनें खरीदना चाहता है । उसके पास निवेश के लिए केवल 5,760 रु. हैं तथा रखने के लिए अधिकतम 20 नगों के लिए स्थान है । एक पंखा 360 रु. में तथा एक सिलाई मशीन 240 रु. में उपलब्ध है । उसे आशा है कि वह एक पंखे को 22 रु. लाभ पर तथा एक सिलाई मशीन को 18 रु. लाभ पर बेच लेगा । यह मानकर कि वह जितनी वस्तुएँ खरीदेगा, बेच लेगा, वह अपनी राशि किस प्रकार निवेश करे कि उसे अधिकतम लाभ हो ? इसको रैखिक प्रोग्रामन समस्या बना कर ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।

29. If the sum of the lengths of the hypotenuse and a side of a right-angled triangle is given, show that the area of the triangle is maximum when the angle between them is $\frac{\pi}{3}$.

OR

A manufacturer can sell x items at a price of Rs. $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ each. The cost price of x items is Rs. $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$. Find the number of items he should sell to earn maximum profit.

यदि किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण तथा एक भुजा की लंबाइयों का योगफल दिया गया हो, तो दर्शाइए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा जबकि उनके बीच का कोण $\frac{\pi}{3}$ है ।

अथवा

एक निर्माता $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ रु. प्रति इकाई की दर से x इकाइयाँ बेच सकता है । x इकाइयों का उत्पाद मूल्य $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ रु. है । इकाइयों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जो उसे अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए बेचनी चाहिए ।