

Mathematics

2010 July

Science 2nd PUC (12th)

University Exam

Department of Pre-University

Education Karnataka (PUE Board)

shaalaa.com

Total No. of Questions : 40]

Code No. 35

Total No. of Printed Pages : 16]

June/July, 2010

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

Time : 3 Hours 15 Minutes]

[Max. Marks : 100

(Kannada Version)

- ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ A, B, C, D ಮತ್ತು E ಎಂಬ ಐದು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - A ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - B ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - C ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - D ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - E ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1. $3(x+1) \equiv (x+3) \pmod{4}$ ನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ x ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $A = \begin{bmatrix} x+2 & y+3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ಅದಿಶ ಮಾತೃಕೆ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣದಲ್ಲಿ "*" ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಮೆ ಮೇಲೆ $a * b = a + b + 5$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಏಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

4. $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ ಸದಿಶದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 1 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$ ರ ಬೆಲೆ ಏನು ?
8. $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೋನಾಂಕವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.
9. x ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $\log_e e^{\sin x}$ ಅನ್ನು ಭೇದಪಡಿಸಿ.
10. $\int_0^{\pi/4} \sec x \cdot \tan x \, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 ×

11. $a \mid b$ ಮತ್ತು $a \mid c$ ಆದಾಗ, x ಮತ್ತು y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ $a \mid bx + cy$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
12. ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $2x + 3y = 7$ ಮತ್ತು $x - y = 1$ ಸಮೀಕನಗಳ x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿನ ಏಕದವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. \vec{d} ಒಂದು ಏಕಸದಿಶವಾಗಿದ್ದು $(\vec{x} - \vec{d}) \cdot (\vec{x} + \vec{d}) = 8$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $|\vec{x}|$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $(2, 3)$ ಮತ್ತು $(3, 2)$ ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ತುದಿಗಳು ಹಾದುಹೋಗುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $x^2 + 16y = 0$ ಪರವಲಯದ ನಾಭಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

17. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ ಆದರೆ, $x^2 + y^2 = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. $2 + 2i$ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

19. x ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ x^{-x} ಅನ್ನು ಭೇದಪಡಿಸಿ.

20. $(2, 1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $y = x^3 + x^2 - 11$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶಕ ಹಾಗೂ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

21. x ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $x \cdot \log x$ ಅನ್ನು ಅನುಕಲಿಸಿ.

22. $y^2 = 4ax$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ a ಎಂಬ ಸ್ವೇಚ್ಛಾ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ವಿಲೋಪಿಸಿ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

23. 30400 ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$x + y - z = 1, \quad 3x + y - 2z = 3, \quad x - y - z = -1.$$

25. \mathcal{Q}^+ ಎಲ್ಲಾ ಅಕರಣೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $*$ ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಮೆ \mathcal{Q}^+ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಾ $a, b \in \mathcal{Q}^+$ ಗಾಗಿ $a * b = \frac{2ab}{3}$ ಯಿಂದ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, $*$ ಅನುಗುಣವಾಗಿ \mathcal{Q}^+ ಒಂದು ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

26. a) ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದು ತೋರಿಸಿ :

$$A(2, 3, -1), \quad B(1, -2, 3), \quad C(3, 4, -2) \text{ ಮತ್ತು } D(1, -6, 6)$$

b) $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ಈ \vec{a} ಮತ್ತು \vec{b} ಎರಡೂ ಸದಿಶಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವಿಕಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

2 × 5 = 10

27. a) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ (x_1, y_1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 6 = 0$$

$x^2 + y^2 - 12x + 2y + 30 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) $(3, 5)$ ಶೃಂಗ ಬಿಂದು ಹಾಗೂ ನಾಭಿ $(3, 2)$ ಇರುವ ಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಾಭಿ ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು $2a$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

29. a) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ ಆದರೆ, $x + y + z = xyz$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\tan 2x + \tan x = 1$ ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

30. a) ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ x ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ a^x ಅನ್ನು ಭೇದಪಡಿಸಿ. 3

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ ಆದರೆ, $(4, 9)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

[Turn over

31. a) $y = e^{m \cos^{-1} x}$ ಆದರೆ,

$$(1 - x^2) y_2 - xy_1 - m^2 y = 0 \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

3

b) $y = x^2 - 4x + 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ $(4, 2)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

32. a) $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3

b) $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

33. a) $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots \infty}}}$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y - 1} \text{ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

3

b) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

34. ಅನುಕಲನ ವಿಧಾನದಿಂದ $y^2 = 6x$ ಹಾಗೂ $x^2 = 6y$ ಪರವಲಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5

ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

$$2 \times 10 = 20$$

35. a) ಅತಿಪರವಲಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6

b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

36. a) $\cos x + \cos y + \cos z = 0 = \sin x + \sin y + \sin z$ ಆದರೆ,

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0 \text{ ಮತ್ತು}$$

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0 \text{ ಹಾಗೂ}$$

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2} \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

6

$$b) \begin{bmatrix} a - 3b - 3c & 4b & 4c \\ 4a & b - 3c - 3a & 4c \\ 4a & 4b & c - 3a - 3b \end{bmatrix} = 9(a + b + c)^3 \text{ ಎಂದು}$$

ಸಾಧಿಸಿ.

4

37. a) ಒಂದು ತಲೆಕೆಳಗಾದ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದ ನೀರಿನ ಪಾತ್ರಗ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ $5\frac{1}{2}$ c.c. ದರದಲ್ಲಿ ನೀರು ಸುರಿಯುತ್ತಿದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯ ತಳ ವರ್ತುಲಾಕಾರವಾಗಿದ್ದು, ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 ಸೆ.ಮೀ. ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 12 ಸೆ.ಮೀ.ಗಳಾಗಿದ್ದು, ಆಳ $3\frac{1}{2}$ ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಏರುವಿಕೆ ದರವನ್ನು ಹಾಗೂ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಹೆಚ್ಚುವ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6

b) ಸವಿಶ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಕೋನವು 90° ಇರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4

38. a) $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಹಾಗೂ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)} \text{ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

6

b) $(e^y + 1) \cos x dx + e^y \cdot \sin x dy = 0$ ಈ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

[Turn over

ವಿಭಾಗ - E

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

1 × 10 = 10

39. a) $1 + \sqrt{3}$ ನ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳ ನಿರಂತರ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು (Continued product) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

b) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ $3x + 4y - 2 = 0$ ರೇಖೆಯಿಂದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

c) 2^{31} ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಧನಾತ್ಮಕ ಶೇಷವನ್ನು ಸಮಶೇಷಿಯತೆ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

40. a) \vec{a} , \vec{b} ಮತ್ತು \vec{c} ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವು ಉಳಿದವು ಸದಿಶಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

b) ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ಕೋಶದ A^3 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

c) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 40 ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

(English Version)

Instructions i) The question paper has *five Parts - A, B, C, D and E.*
Answer all the parts.

ii) **Part - A** carries 10 marks. **Part - B** carries 20 marks,
Part - C carries 40 marks. **Part - D** carries 20 marks and
Part - E carries 10 marks.

PART - A

Answer all the ten questions :

$10 \times 1 = 10$

1. Find the least positive x integer satisfying $3(x+1) \equiv (x+3) \pmod{4}$.
2. If $A = \begin{bmatrix} x+2 & y+3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ is a scalar matrix, find x & y .
3. On the set of all integers a binary operation "*" is defined by $a * b = a + b + 5$,
find the identity element.
4. Find the unit vector in the direction of the vector $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$.
5. Find the length of the tangent to the circle $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 1 = 0$
from the point $(1, 2)$.

[Turn over

6. Find the eccentricity of the ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
7. Find the value of $\sin \left(\tan^{-1} \frac{3}{4} \right)$.
8. Find the amplitude of the complex number $\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$.
9. Differentiate $\log_e e^{\sin x}$ with respect to x .
10. Evaluate $\int_0^{\pi/4} \sec x \cdot \tan x \, dx$.

PART - B

Answer any ten questions :

10 × 2 = 20

11. If $a \mid b$ and $a \mid c$, show that $a \mid bx + cy$ where x and y are any two integers.
12. Find the value of x and y by Cramer's rule given $2x + 3y = 7$, $x - y = 1$.
13. In a group $(G, *)$ prove that identity element is unique.
14. If \vec{a} a unit vector and $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 8$, find $|\vec{x}|$.
15. Find the equation of the circle passing through the ends of the diameter whose end points are $(2, 3)$ and $(3, 2)$.
16. Find the focus of the parabola $x^2 + 16y = 0$.

17. If $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$, show that $x^2 + y^2 = 1$.
18. Express the complex number $2 + 2i$ in the polar form.
19. Differentiate x^x with respect to x .
20. Find the length of subtangent and subnormal to the curve $y = x^3 + x^2 - 11$ at $(2, 1)$.
21. Integrate $x \cdot \log x$ with respect to x .
22. Form the differential equation by eliminating the arbitrary constant a from the equation $y^2 = 4ax$.

PART - C

1. Answer any *three* questions : 3 × 5 = 15

23. Find the number of positive divisors and sum of all positive divisors of the integer 30400. 5

24. Solve by matrix method :

$$x + y - z = 1, \quad 3x + y - 2z = 3, \quad x - y - z = -1. \quad 5$$

[Turn over

25. If \mathbb{Q}^+ is the set of all positive rational numbers and a binary operation " $*$ " defined on \mathbb{Q}^+ by $a * b = \frac{2ab}{3}$ for all $a, b \in \mathbb{Q}^+$, prove that \mathbb{Q}^+ is an Abelian group with respect to " $*$ ". 5

26. a) Show that the points $A(2, 3, -1)$, $B(1, -2, 3)$, $C(3, 4, -2)$ and $D(1, -6, 6)$ are coplanar. 3

- b) Find the unit vector perpendicular to both \vec{a} & \vec{b} given $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$. 2

II. Answer any two questions :

2 × 5 = 10

27. a) Derive the equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ at a point (x_1, y_1) on it. 3

- b) Find the radical centre of the circles

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 2y + 30 = 0$$

2

28. a) Find the equation of the parabola having vertex at $(3, 5)$ and focus at $(3, 2)$. 3

- b) Prove that the sum of the focal distances from any point on the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) is equal to $2a$. 2

29. a) If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, prove that $x + y + z = xyz$.

3

b) Find the general solution of $\tan 2x + \tan x = 1$.

2

III. Answer any three of the following questions :

3 × 5 = 15

30. a) Differentiate a^x with respect to x from first principle.

3

b) If $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ then find $\frac{dy}{dx}$ at the point (4, 9).

2

31. a) If $y = e^{m \cos^{-1} x}$ then prove that

$$(1 - x^2) y_2 - xy_1 - m^2 y = 0.$$

3

b) Find the equation of the normal to the curve $y = x^2 - 4x + 2$ at the point (4, 2).

2

32. a) Evaluate $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$.

3

b) Evaluate $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$.

2

33. a) If $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots \infty}}}$ then

prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y - 1}$.

3

b) Evaluate $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

2

34. Find the area enclosed between the parabolas $y^2 = 6x$ and $x^2 = 6y$

by the method of integration.

5

[Turn over

PART - D

Answer any two of the following questions :

2 × 10 = 20

35. a) Define a hyperbola as a locus and derive the equation of the hyperbola in the standard form $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 6

- b) Find the general solutions for the trigonometric equation $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$. 4

36. a) If $\cos x + \cos y + \cos z = 0 = \sin x + \sin y + \sin z$ then prove that

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$$

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$$

$$\text{and } \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 3/2$$

6

- b) Prove that

$$\begin{bmatrix} a - 3b - 3c & 4b & 4c \\ 4a & b - 3c - 3a & 4c \\ 4a & 4b & c - 3a - 3b \end{bmatrix} = 9(a + b + c)^3. \quad 4$$

37. a) Water is poured into an inverted conical vessel of which the radius of base is 6 cm and height is 12 cm at the rate of $5\frac{1}{2}$ c.c. per second.

At what rate is the water level rising at the instant, when the depth is $3\frac{1}{2}$ cm? Also find the rate of increase in the surface area of the

water level at that instant. 6

- b) Prove by vector method that the angle in a semicircle is equal to 90° . 4

38. a) Prove that $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ and hence evaluate

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)}$$

6

- b) Solve the differential equation

$$(e^y + 1) \cos x dx + e^y \cdot \sin x dy = 0.$$

4

PART - E

Answer any one of the following questions :

1 × 10 = 10

39. a) Find the cube roots of $1 + \sqrt{3}i$ and find the continued product of the roots.

4

- b) Find the length of the chord intercepted by the circle

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0 \text{ and } 3x + 4y - 2 = 0.$$

4

- c) Find the positive remainder obtained when 2^{31} is divided by 7 using the method of congruence.

2

40. a) Let \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} be any three vectors such that $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$ and each vector is equal to the sum of the other two vectors: find the value of $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

4

[Turn over

- b) Find A^3 using Cayley-Hamilton theorem given $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$. 4
- c) The sum of two numbers is 40. Find the numbers when their product is maximum. 2
-
-