2002

STATISTICS

Paper I

Time : 3 Hours] *[Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in English and in Kannada.

Answers must be written in the medium specified (English *or* Kannada) in the Admission Ticket issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for this purpose. No credit will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Ticket.

The Question Paper is divided into *three* Sections *A*, *B* and *C*.

Candidates should attempt any *five* questions choosing at least *one* but not more than *two* from each Section.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

All questions carry equal marks.

ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸೂಚನೆಗಳ ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

SECTION – A

(Probability)

1. (a) Show that the conditional probability function $P(\cdot \mid E)$ satisfies the axioms of a probability space. Demonstrate through an example that pair-wise independence need not imply mutual independence.

(b) Two dice, one green and the other red are thrown. Let A be the event that the sum of points of the faces shown is odd and B the event of at least one ace (number 1). Describe the sample space and event space $A \cap B$ and $A \cap \bar{B}$ and find the probabilities of the events $P\left(\bar{A} \cup B\right)$; $P\left(\bar{A} \cap (A \cup B)\right)$; $P(B \mid A)$.

(c) Let r indistinguishable balls be placed at random in n components of a box. Let A_k be the event that a specified compartment has exactly k balls. Find $P\left(A_k\right)$.

2. (a) The joint density function of the random variable X and Y is given by

$$f(X, Y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le 1 \; ; \; 0 < y \le x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find (i) the marginal density of X (ii) the marginal density of Y (iii) the conditional density of X and (ii) the conditional density of Y.

(b) For a given λ (> 0), the random variable X has the Poisson distribution with parameter λ. But λ itself is a random variable having *pdf*

$$g(\lambda) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \exp[-\alpha\lambda] \,.\, \lambda^{r-1}, \quad \lambda \ge 0.$$

What is the unconditional distribution of X? Obtain the mean and variance of this distribution. Are the two still equal ?

(c) Let $f\left(x_1, x_2\right) = 21\, x_1^2 x_2^2$; $0 < x_1 < x_2 < 1$ and zero elsewhere be the joint *p.d.f.* of X_1 and X_2. Find the conditional mean and variance of X_1 given $X_2 = x_2$; $0 < x_2 < 1$.

ವಿಭಾಗ – ಎ

(ಸಂಭವನೀಯತೆ)

1 (a) ಸಪ್ರತಿಬಂಧ ಸಂಭವನೀಯತಾ ಫಲನ $P(* \mid E)$ಯು ಒಂದು ಸಂಭವನೀಯತಾ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ಯುಗಳ ಪ್ರತಿಬಾಧವು ಅನ್ಯೋನ್ಯ ಪ್ರತಿಬಾಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.

(b) ಒಂದು ಹಸಿರು ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣವುಳ್ಳ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. A ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿ ಅದರ ಫಲಕಗಳ ಮೇಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಿ ಮತ್ತು B ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯೆಂದರೆ ಒಂದು ಉತ್ಕೃಷ್ಟ (Ace) ಅಥವಾ (ಸಂಖ್ಯೆ 1) ಆಗಲಿ. ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಮತ್ತು ಘಟನಾ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಾದ $A \cap B$ ಮತ್ತು $A \cap \bar{B}$ ಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ಮತ್ತು $P\left(\bar{A} \cup B\right)$; $P\left(\bar{A} \cap (A \cup B)\right)$; $P(B \mid A)$ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ r ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭೇದ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ n ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. A_k ಘಟನೆಯಾಗಿದ್ದು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಕಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ k ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತಾಗಲಿ. $P\left(A_k\right)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. (a) X ಮತ್ತು Y ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರದ ಸಂಯುಕ್ತ ಘನತ್ವ ಫಲನವನ್ನು

$$f(X, Y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le 1 \; ; \; 0 < y \le x \\ 0 & \text{ಇಲ್ಲವಾದರೆ} \end{cases}$$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

(i) Xನ ಉಪಾಂತ ಘನತ್ವ (ii) Yನ ಉಪಾಂತ ಘನತ್ವ (iii) X ನ ಸಪ್ರತಿಬಂಧ ಘನತ್ವ ಮತ್ತು (iv) Y ನ ಸಪ್ರತಿಬಂಧ ಘನತ್ವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು λ (> 0) ಗಾಗಿ, X ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರವು λ ಪ್ರಾಚಲದೊಂದಿಗೆ ಪೊಯ್ಸನ್ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದರೆ λ ತಾನೇ ತಾನಾಗಿ ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರವಾಗಿದ್ದು

$$g(\lambda) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \exp[-a\lambda] \,.\, \lambda^{r-1}, \; \lambda \ge 0,$$ pdf ಹೊಂದಿದೆ.

X ನ ಅಪ್ರತಿಬಂಧ ವಿತರಣೆ ಏನು ? ಈ ವಿತರಣೆಯ ಮಾಧ್ಯ ಮತ್ತು ಪ್ರಸರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಈ ಎರಡು ಈಗಲೂ ಸಮನಾಗಿದೆಯೆ ?

(c) $f\left(x_1, x_2\right) = 21\, x_1^2\, x_2^2$; $0 < x_1 < x_2 < 1$ ಮತ್ತು X_1 ಮತ್ತು X_2 ನ ಶೂನ್ಯವು ಬೇರೆಡೆಯ ಸಂಧಿ $p.d.f.$ ಆಗಿರಲಿ. X_1 ನ ಸಪ್ರತಿಬಂಧ ಮಾಧ್ಯ ಮತ್ತು ಪ್ರಸರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $X_2 = x_2$; $0 < x_2 < 1$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

3. (a) State the continuity theorem for characteristic functions. Let X_n be a random variable with *p.m.f.*

$$P\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{n}\ ;\ P\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Investigate whether the sequence of distribution functions of X converges weakly to the distribution function of a random variable. Ii yes, find the distribution of the limiting random variable.

(b) Establish basic inequality and demonstrate its use in obtaining Markov inequality.

(c) If X and Y are independent Gamma variates with paramaters μ and γ respectively, show that

$$U = X + Y,\ \ Z = \frac{X}{Y}$$

are independent and that U is gamma $(\mu + \gamma)$ variate and Z is a $\beta_2(\mu, \gamma)$ variate.

4. (a) Explain Law of Large Numbers. State and prove Khintchine's theorem. Let X_i assume two values i and $-i$ with equal probabilities. Show that the law of large numbers cannot be applied to these variables.

(b) State and prove the De Moivre-Laplace theorem.

(c) If $\left\{X_k\right\}$ be a sequence of random variables such that

$$\frac{1}{n^2}\ Var\left(\sum_1^n X_k\right) \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

then show that $\bar{X}_n - \bar{\mu}_n \to 0$ where $EX_k = \mu k$.

3. (a) ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಫಲನಕ್ಕಾಗಿ ಸಾಂತತ್ಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. X_n, *p.m.f.* ನೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರವಾಗಿರಲಿ.

$$P\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{n} \; ; \; P\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

X ನ ವಿತರಣಾ ಫಲನಗಳ ಅನುಕ್ರಮವು ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರದ ವಿತರಣಾ ಫಲನಕ್ಕೆ ದುರ್ಬಲವಾಗಿ ಒಮ್ಮುಖವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹೌದಾದರೆ, ಸೀಮಾಂತ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) ಆಧರಿತ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಕೋವ್ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಇದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿ.

(c) X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ಗಾಮಗಳಾಗಿದ್ದು, ಕ್ರಮವಾಗಿ μ ಮತ್ತು γ ಪ್ರಾಚಲಗಳೊಂದಿಗೆ ವಿಚರವಾದರೆ,

$$U = X + Y, \;\; Z = \frac{X}{Y}$$ ಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು

U ಒಂದು ಗಾಮಾ $(\mu + \gamma)$ ವಿಚರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು Z ಒಂದು $\beta_2(\mu, \gamma)$ ವಿಚರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. (a) ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿಯಮವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಕೈನ್‌ಚೈನ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ. X_i ಸಮ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು i ಮತ್ತು $-i$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಈ ಚರಗಳಿಗೆ ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿಯಮವು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(b) ಡಿ ಮೂಪ್ರಿ – ಲಾಪ್ಲಾಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ.

(c) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರಗಳ ಅನುಕ್ರಮವು $\left\{X_k\right\}$ ಆದಲ್ಲಿ $\frac{1}{n^2} \; Var\left(\sum_1^n X_k\right) \to 0$ ಹಾಗೆ $n \to \infty$ ಹಾಗಾದರೆ $EK_k = \mu k$ ಆದಾಗ $\bar{X}_n - \bar{\mu}_n \to 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

SECTION – B

(Statistical Inference)

5. (a) Explain the concept of estimation in statistical inference and record your understanding of consistency and efficiency.

(b) Let $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ be a sample from

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 \le x \le \theta_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Obtain the estimates of θ_1, θ_2 by the method of moments and by the method of maximum likelihood.

(c) State and explain Lehmamn-Scheffe theorem with an example.

6. (a) Explain the concept of (i) Type II error and (ii) Power curve. Let X has a binomial law with $n = 10$, p where $pt\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. If the observed value of X_1, a random sample of size one, is less than or equal to 3, we reject $H_0 : p = \frac{1}{2}$ and accept $H_1 : p = \frac{1}{4}$. Find the power function of the test.

(b) Develop the test procedure to test the hypothesis $H_0 : \mu = \mu_0$ against $H_1 : \mu = \mu_1$ in the distribution

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2r\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma 2}(X-\mu)2}, \text{ where } \sigma \text{ is known.}$$

(c) Let $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ be a random sample from a distribution with *p.d.f.* $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} : 0 < x < \theta$. Find the confidence interval for θ based on maximum likelihood estimator of θ.

ವಿಭಾಗ – ಬಿ

(ಸಾಂಖ್ಯಿಕೀಯ ಊಹೆ)

5. (a) ಸಾಂಖ್ಯಿಕೀಯ ಊಹೆಯಲ್ಲಿ ಆಕಲನದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಂಗತಿ ಪ್ರತಿಬಂಧ ಮತ್ತು ದಕ್ಷತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮ ಗ್ರಹಣಶಕ್ತಿಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ.

(b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 \leq x \leq \theta_2 \\ 0 & \text{ಇಲ್ಲವಾದರೆ} \end{cases}$$

ಇದರಿಂದ $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ ಒಂದು ಪ್ರತಿಚಯವಾಗಿರಲಿ. ಆಘೂರ್ಣ ವಿಧಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ಅಧಿಕತಮ ಸಂಭಾವಿತ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ θ_1, θ_2 ಗಳ ಆಕಲನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

(c) ಲೆಹ್‌ಮನ್-ಶೆಫೆ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ವಿವರಿಸಿ.

6. (a) (i) ಟೈಪ್ II ಪ್ರಮಾದ (ii) ಘಾತ ವಕ್ರದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. $pt\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ಆದಲ್ಲಿ p ಯೊಂದಿಗೆ X, $n = 10$ ರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ದ್ವಿನಾಮೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತಾಗಲಿ. X_1 ರ ಪ್ರೇಕ್ಷಿತ ಮಾನ, ಸೈಜ್ ಒಂದರ ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ನಮೂನೆಯು 3 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮ ಆದಾಗ $H_0 : p = \frac{1}{2}$ ವನ್ನು ತಿರಸ್ಕರಿಸಿ ಮತ್ತು $H_1 : p = \frac{1}{4}$ ವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಿ. ಪರೀಕ್ಷಣದ ಕ್ಷಮತಾ ಫಲನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) σ ಗೊತ್ತಿರುವಾಗ, $f(x; \mu, \sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2r}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}$

ವಿತರಣೆಯೊಂದಿಗೆ $H_1 : \mu = \mu_1$ ವಿರುದ್ಧ $H_0 : \mu = \mu_0$ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿ.

(c) $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta}$; $0 < x < \theta$ *p.d.f.* ನೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ವಿತರಣೆಯಿಂದ $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರತಿಚಯವಾಗಿರಲಿ. θ ದ ಅಧಿಕತಮ ಸಂಭಾವಿತದ ಮೇಲೆ ಆಧರಿಸಿ θ ದ ವಿಶ್ವಾಸನೀಯತಾ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. (a) Let $X_1, \ldots X_n$ and $Y_1, \ldots Y_m$ be random samples from the independent distributions $N(\theta_1, \theta_3)$ and $N(\theta_2, \theta_4)$ respectively. Show that the likelihood ratio that $H_0 : \theta_3 = \theta_4$; θ_1, θ_2 unspecified against $H_1 : \theta_3 \neq \theta_4$; θ_1 and θ_2 unspecified can be based on the random variable :

$$F = \frac{\sum_{1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 / (n-1)}{\sum_{1}^{m}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 / (m-1)}$$

(b) State Neyman-Pearson lemma. Mention its restrictions. A sample of size 1 is taken from density

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2(\theta - X)^2}{\theta^2} & ; \ 0 < x < \theta \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find the *MPT* of $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_0 > \theta_1)$ at level α.

(c) Let k independent random samples be drawn from $k\ N\left(\theta_i, \sigma_i^2\right)$ distributions, $i = 1, 2, \ldots\ldots k$. Derive the LR test for $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k$ assuming $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots \sigma_k$. Show that this test can be reduced to the F-test.

8. (a) Define the *OC* function and *ASN* function of sequential analysis. Derive then appropriate expression for the sequential probability ratio test of a simple hypothesis against a simple alternative.

(b) Describe clearly (i) Wilcoxon-Mann-Whitney test and (ii) Kolmogorov-Smirnov test for the two sample problem. Consider both one-sided and two-sided alternatives.

(c) Indicate the details of comparison of the A.S.N. of S.P.R.T. with that of fixed sample of size n of Neyman-Pearson test of hypothesis.

7. (a) $N\left(\theta_1, \theta_3\right)$ ಮತ್ತು $N\left(\theta_2, \theta_4\right)$ ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿತರಣೆಗಳಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ $X_1, \ldots X_n$ ಮತ್ತು $Y_1, \ldots Y_m$ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರತಿಚಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$F = \frac{\sum_{1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 / (n-1)}{\sum_{1}^{m}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 / (m-1)}$$

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರವನ್ನಾಧರಿಸಿ $H_1 : \theta_3 \neq \theta_4 ; \theta_1$ ಮತ್ತು θ_2 ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟದ ವಿರುದ್ಧ $H_0 : \theta_3 = \theta_4 ; \theta_1, \theta_2$ ಅನಿರ್ಧಿಷ್ಟದ ಸಂಭಾವಿತಾ ಅನುಪಾತ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(b) ನೇಮ್ಯಾನ್-ಪಿಯರ್‌ಸನ್ ಪ್ರಮೇಯಿಕಾ (Lemma) ವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. ಇದರ ಇತಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ. ಸೈಜ್ 1 ರ ಒಂದು ಪ್ರತಿದರ್ಶವನ್ನು

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2(\theta - X)^2}{\theta^2} & ; \ 0 < x < \theta \\ 0 & \text{ಇಲ್ಲವಾದರೆ} \end{cases}$$

ಫಲನತ್ವದಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಸ್ತರ α ದಲ್ಲಿ $H_0 : \theta = \theta_0$ ವಿರುದ್ಧ $H_1 : \theta = \theta_1 \ \left(\theta_0 > \theta_1\right)$ ದ *MPT* ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) $k \ N\left(\theta_i, \sigma_i^2\right)$ ವಿತರಣೆಗಳು, $i = 1, 2, \ldots\ldots k$ ಯಿಂದ ಆರೇಖಿಸಿದ ಸ್ವತಂತ್ರ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರತಿದರ್ಶಗಳು k ಆಗಿರಲಿ. $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots \sigma_k$ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k$ ಕುರಿತು *LR* ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಸಿ. ಈ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು *F*-ಪರೀಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ಅಪಚಯಗೊಳಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. (a) ಅನುಕ್ರಮಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ *OC* ಫಲನ ಮತ್ತು *ASN* ಫಲನವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. ಒಂದು ಸರಳ ವೈಕಲ್ಪಿಕದ ವಿರುದ್ಧ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಅನುಕ್ರಮಿಕ ಸಂಭವನೀಯತಾ ಅನುಪಾತ ಪರೀಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ಅವುಗಳ ಯುಕ್ತ ನಿಷ್ಪೀಡನೆಯನ್ನು ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಸಿ.

(b) ಎರಡು ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ (i) ವಿಲ್‌ಕೊಕ್ಸನ್-ಮಾನ್-ವಿಟ್ನಿ ಪರೀಕ್ಷಣ ಮತ್ತು (ii) ಕೊಲ್‌ಮೊಗೊರೊವ್-ಸ್ಮಿರ್ನೊವ್ ಪರೀಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿ. ಏಕ-ಪುಚ್ಛೀಯ ಮತ್ತು ದ್ವಿ-ಪುಚ್ಛೀಯ ವೈಕಲ್ಪಿಕಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

(c) ನೆಮ್ಯಾನ್-ಪಿಯರ್‌ಸಸ್ ಪರೀಕ್ಷಣದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಸೈಜ್ n ನ ನಿಯತ ಪ್ರತಿದರ್ಶದೊಂದಿಗೆ S.P.R.T.ಯ A.S.N. ಗಳ ತುಲನೆಯ ವಿವರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿ.

SECTION - C

(Linear Inference and Multivariate Analysis)

9. (a) Prove the necessary and sufficient condition for a parametric function to be estimable and that for a linear function of the variable belongs to error. Show that BLUEs are uncorrelated with linear functions belonging to error.

(b) Let $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + e_i$; $i = 1, 2, \ldots n$ be a simple linear model where β_1 and β_2 are unknown scalar constants, x_i are known scalar constants. Develop a test procedure to obtain the confidence interval for

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} y_{oj} .$$

(c) Use the technique of analysis of variance for testing that in a multiple linear regression model there is no dependence of the dependent variable on the regressor variable.

10. (a) Show that the general linear regression model covers both multiple linear regression and polynomial regression. Show how this fits into Gauss-Markov linear model.

(b) If the n_{ij} in the model $y_{ijk} = \mu + \bar{z}_i + \beta_j + e_{ijk}$ are such that

$\bar{z}_i - \bar{z}_j$; $\beta_{i'} - \beta_{j'}$ are estimable for all $i \neq j$ and all $i' \neq j'$, then

(i) there are exactly $b + t - 1$ linearly independent estimable functions

(ii) $\Sigma c_i \bar{z}_i$ and $\Sigma d_j \beta_j$ are estimable if $\Sigma c_i = \Sigma d_i = 0$.

(c) Provide the details of multiple correlation coefficient and its estimation. Obtain the distribution of the sample multiple correlation coefficient when population multiple correlation coefficient is zero.

ವಿಭಾಗ – ಸಿ

(ರೇಖೀಯ ಊಹೆ ಮತ್ತು ಬಹುಚರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ)

9. (a) ಅಶುದ್ಧತೆ (ತ್ರುಟಿ)ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚರ ರೇಖೀಯ ಫಲನಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಪ್ರಾಚಲ ಫಲನವನ್ನು ಆಕಲನ ಮಾಡಲು ಬೇಕಾಗುವ ಅವಶ್ಯಕ ಮತ್ತು ಸಾಕಷ್ಟು ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. ಅಶುದ್ಧತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ರೇಖೀಯ ಫಲನಗಳೊಂದಿಗೆ BLUEಗಳು ಅಸಹಸಂಬಂಧಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(b) β_1 ಮತ್ತು β_2 ಗಳು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ ಅದಿಶ ಸ್ಥಿರಗಳು, x_i ಗಳು ಗೊತ್ತಿರುವ ಅದಿಶ ಸ್ಥಿರಗಳಾದಾಗ $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + e_i$; $i = 1, 2, \ldots n$ ಗಳು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೀಯ ನಿದರ್ಶವಾಗಿರಲಿ.

$\bar{y}_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} y_{oj}$ ಗೆ ವಿಶ್ವಾಸನೀಯತಾ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷಣಾ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಗೊಳಿಸಿ.

(c) ಒಂದು ಬಹುರೇಖೀಯ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಪ್ರತಿರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಮಾಶ್ರಯಿ ಚರದ ಮೇಲೆ ಪರತಂತ್ರ ಚರದ ಪರತಂತ್ರತೆಯು ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಸುವ ಪರೀಕ್ಷಣೆಗಾಗಿ ಪ್ರಸರಣದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ತಂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

10. (a) ಸಾಮಾನ್ಯ ರೇಖೀಯ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಪ್ರತಿರೂಪವು ಬಹುರೇಖೀಯ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಮತ್ತು ಬಹುಪದ ಸಮಾಶ್ರಯಣಗಳೆರಡನ್ನೂ ಆವರಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಗಾಸ್-ಮಾರ್ಕೊವ್ ರೇಖೀಯ ಪ್ರತಿರೂಪಕ್ಕೆ ಇದು ಹೇಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(b) $y_{ijk} = \mu + \bar{z}_i + \beta_j + e_{ijk}$ ಪ್ರತಿರೂಪದಲ್ಲಿ n_{ij} ಯು ಎಲ್ಲಾ $i \neq j$ ಮತ್ತು $i' \neq j'$ ಗಳ $\bar{z}_i - \bar{z}_j$; $\beta_{i'} - \beta_{j'}$ ಆಕಲನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ

(i) $b + t - 1$ ರೇಖೀಯತಃ ಸ್ವತಂತ್ರ ಆಕಲನ ಮಾಡುವ ಫಲನಗಳ ನಿಖರತೆ ಇರುತ್ತದೆ

(ii) $\sum c_i = \sum d_i = 0$ ಗಳು ಆದಲ್ಲಿ $\sum c_i \bar{z}_i$ ಮತ್ತು $\sum d_j \beta_j$ ಗಳು ಆಕಲನೀಯವಾಗುತ್ತದೆ.

(c) ಬಹುಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಅದರ ಆಕಲನದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿ. ಜನಸಂಖ್ಯಾ ಬಹುಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಬಹುಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

[Turn over

11. (a) Show that the matrix in the exponent of a p-variate normal distribution is the inverse of the variance-covariance matrix of the vector Y.

(b) If $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n$ are sample means for random sample of size n from $N_p(\mu, \Sigma)$, show that $n\left(\bar{X}-\mu\right)'\Sigma^{-1}\left(\bar{X}-\mu\right)$ has the χ^2-distribution with p degrees of freedom.

(c) Show that under usual normal population regression model the joint distribution of the partial regression coefficient is multivariate normal.

12. (a) Provide the description of Fisher's discriminant function and develop the test procedure for additional discrimination and assigned discriminant functions.

(b) Define Hotelling T^2-statistic. Derive the likelihood ratio criterion for testing the hypothesis that the mean vectors of two p-variate normal distributions with same dispersion matrix, are equal. Show that the above test can be given by T^2-statistic.

(c) Provide a detailed note on the basic concepts of principal component analysis.

11. (a) p-ಚರದ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ Y ಸದಿಶದ ಪ್ರಸರಣ-ಸಹಪ್ರಸರಣ ಆವ್ಯೂಹದ ವಿಲೋಮ ಅವ್ಯೂಹ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(b) $N_p(\mu, \Sigma)$ ದಿಂದ ಸೈಜ್ n ನ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರತಿದರ್ಶಕ್ಕೆ $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n$ ಗಳು ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಮಾಧ್ಯಗಳಾದರೆ, $n\left(\bar{X}-\mu\right)'\Sigma^{-1}\left(\bar{X}-\mu\right)$ ಸ್ವತಂತ್ರತೆಯ p ಡಿಗ್ರಿಗಳೊಂದಿಗೆ χ^2-ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(c) ಸಾಧಾರಣ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಜನಸಂಖ್ಯಾ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಪ್ರತಿರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕದ ಸಂಯುಕ್ತ ವಿತರಣೆಯು ಬಹುಚರ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. (a) ಫಿಷರ್‌ನ ವಿವಿಕ್ತಾಕಾರ ಫಲನದ ವರ್ಣನೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಂಕಲಿತ ವಿವೇಚನೆ ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ವಿವಿಕ್ತಾಕಾರ ಫಲನಗಳಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಣಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿ.

(b) ಹೋಟಲಿಂಗ್‌ನ T^2-ಪ್ರತಿದರ್ಶಜವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. ಎರಡು p-ಚರದ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಗಳ ಮಾಧ್ಯ ಸದಿಶಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಸಂಭಾವಿತಾ ಅನುಪಾತ ನಿಕಷವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಮೇಲಿನ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು T^2-ಪ್ರತಿದರ್ಶಜವು ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(c) ಮುಖ್ಯ ಘಟಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಮೇಲೆ ವಿವರವಾದ ಟಿಪ್ಪಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.