

CBSE Class 12th Mathematics Question Paper 2013 Set-1



Simplifying Test Prep

सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स। खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है। खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है। खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं। फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है। यदि आवश्यक हो तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं।

General Instructions :

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of **one mark** each, Section B comprises of 12 questions of **four marks** each and Section C comprises of 7 questions of **six marks** each.
- (iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- (iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- (v) Use of calculators is **not** permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.

खण्ड अ
SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

1. $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान लिखिए।

Write the principal value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$.

2. $\tan^{-1}\left[2 \sin\left(2 \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ का मान लिखिए।

Write the value of $\tan^{-1}\left[2 \sin\left(2 \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

3. x के किस मान के लिए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम-सममित आव्यूह है ?

For what value of x , is the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}$ a

skew-symmetric matrix ?

4. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A^2 = kA$ है, तो k का मान लिखिए।

If matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ and $A^2 = kA$; then write the value of k .

5. वक्रों के कुल $y = mx$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण लिखिए, जबकि m एक स्वेच्छ अचर है।

Write the differential equation representing the family of curves $y = mx$, where m is an arbitrary constant.

6. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ के अवयव a_{ij} का सहखण्ड A_{ij} है, तो $a_{32} \cdot A_{32}$ का मान लिखिए।

If A_{ij} is the cofactor of the element a_{ij} of the determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}, \text{ then write the value of } a_{32} \cdot A_{32}.$$

7. दो बिन्दुओं P तथा Q के स्थिति सदिश क्रमशः $3\vec{a} - 2\vec{b}$ तथा $\vec{a} + \vec{b}$ हैं। एक ऐसे बिन्दु R का स्थिति सदिश लिखिए जो रेखाखण्ड PQ का 2 : 1 के अनुपात में बाह्य विभाजन करता है।

P and Q are two points with position vectors $3\vec{a} - 2\vec{b}$ and $\vec{a} + \vec{b}$ respectively. Write the position vector of a point R which divides the line segment PQ in the ratio 2 : 1 externally.

8. यदि एक मात्रक सदिश \vec{a} के लिए, $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 15$ है, तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए।

Find $|\vec{x}|$, if for a unit vector \vec{a} , $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 15$.

9. मूल बिन्दु से समतल $2x - 3y + 6z + 21 = 0$ पर डाले गए लंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

Find the length of the perpendicular drawn from the origin to the plane $2x - 3y + 6z + 21 = 0$.

10. एक फर्म के कर्मचारियों के कल्याण पर व्यय की जाने वाली राशि, फर्म की संपूर्ण आय में परिवर्तन की दर (सीमांत आय) के समानुपाती है। यदि उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय (रुपयों में) $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है, तो जब $x = 5$ हो, तो सीमांत आय ज्ञात कीजिए तथा लिखिए कि उपर्युक्त प्रश्न कौन-सा मूल्य दर्शाता है।

The money to be spent for the welfare of the employees of a firm is proportional to the rate of change of its total revenue (marginal revenue). If the total revenue (in rupees) received from the sale of x units of a product is given by $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$, find the marginal revenue, when $x = 5$, and write which value does the question indicate.

खण्ड ब
SECTION B

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।
Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

11. $f(x) = x^2 + 4$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow [4, \infty)$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा f का प्रतिलोम f^{-1} , $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$, द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ \mathbf{R}_+ सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

Consider $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow [4, \infty)$ given by $f(x) = x^2 + 4$. Show that f is invertible with the inverse f^{-1} of f given by $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$, where \mathbf{R}_+ is the set of all non-negative real numbers.

12. दर्शाइए कि :

$$\tan\left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4}\right) = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

अथवा

निम्न समीकरण को हल कीजिए :

$$\cos(\tan^{-1} x) = \sin\left(\cot^{-1} \frac{3}{4}\right)$$

Show that :

$$\tan\left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4}\right) = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

OR

Solve the following equation :

$$\cos(\tan^{-1} x) = \sin\left(\cot^{-1} \frac{3}{4}\right)$$

13. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix} = 9y^2(x+y)$$

Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix} = 9y^2(x+y)$$

14. यदि $y^x = e^{y-x}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log y)^2}{\log y}$.

If $y^x = e^{y-x}$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log y)^2}{\log y}$.

15. निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए :

$$\sin^{-1} \left(\frac{2^{x+1} \cdot 3^x}{1+(36)^x} \right)$$

Differentiate the following with respect to x :

$$\sin^{-1} \left(\frac{2^{x+1} \cdot 3^x}{1+(36)^x} \right)$$

16. k का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+kx} - \sqrt{1-kx}}{x}, & \text{यदि } -1 \leq x < 0 \\ \frac{2x+1}{x-1}, & \text{यदि } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$x = 0$ पर, संतत है।

अथवा

यदि $x = a \cos^3 \theta$ तथा $y = a \sin^3 \theta$ है, तो $\theta = \frac{\pi}{6}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात

कीजिए।

Find the value of k , for which

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+kx} - \sqrt{1-kx}}{x}, & \text{if } -1 \leq x < 0 \\ \frac{2x+1}{x-1}, & \text{if } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$.

OR

If $x = a \cos^3 \theta$ and $y = a \sin^3 \theta$, then find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ at

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

17. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx$$

OR

Evaluate :

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$$

18. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{x(x^5 + 3)}$$

Evaluate :

$$\int \frac{dx}{x(x^5 + 3)}$$

19. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + e^{\sin x}} dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + e^{\sin x}} dx$$

20. यदि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 5\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए, ताकि $\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} - \vec{b}$ लंबवत् सदिश हैं।

If $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{b} = 5\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$, then find the value of λ , so that $\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - \vec{b}$ are perpendicular vectors.

21. दर्शाइए कि निम्न रेखाएँ

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k});$$

$$\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

परस्पर प्रतिच्छेदी हैं। अतः इनका प्रतिच्छेदन बिन्दु ज्ञात कीजिए।

अथवा

बिन्दुओं $(2, 1, -1)$ तथा $(-1, 3, 4)$ से होकर जाने वाले उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए, जो समतल $x - 2y + 4z = 10$ के लंबवत् है।

Show that the lines

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k});$$

$$\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

are intersecting. Hence find their point of intersection.

OR

Find the vector equation of the plane through the points (2, 1, -1) and (-1, 3, 4) and perpendicular to the plane $x - 2y + 4z = 10$.

22. दो विद्यार्थियों A तथा B के विद्यालय में समय पर आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{3}{7}$ तथा $\frac{5}{7}$ हैं। यह मानते हुए कि घटनाएँ, 'A का समय पर आना' तथा 'B का समय पर आना' स्वतंत्र घटनाएँ हैं, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उनमें से केवल एक, विद्यालय में समय पर आए। विद्यालय में समय पर आने का कम-से-कम एक लाभ लिखिए।

The probabilities of two students A and B coming to the school in time are $\frac{3}{7}$ and $\frac{5}{7}$ respectively. Assuming that the events, 'A coming in time' and 'B coming in time' are independent, find the probability of only one of them coming to the school in time.

Write at least one advantage of coming to school in time.

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है।

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

23. उस बड़े-से-बड़े आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो एक दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत बनाया जा सकता है।

अथवा

वक्र $3x^2 - y^2 = 8$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(\frac{4}{3}, 0)$ से होकर जाती हैं।

Find the area of the greatest rectangle that can be inscribed in an ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

OR

Find the equations of tangents to the curve $3x^2 - y^2 = 8$, which pass through the point $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.

24. परवलय $y = x^2$ तथा $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the region bounded by the parabola $y = x^2$ and $y = |x|$.

25. अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि जब $x = 0$ है, तो $y = 0$ है।

Find the particular solution of the differential equation $(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$, given that when $x = 0, y = 0$.

26. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) - 6 = 0$ तथा $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाता है तथा मूल बिन्दु से एक मात्रक की लंबवत् दूरी पर है।

अथवा

बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली तथा समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ और $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the plane passing through the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) - 6 = 0$ and $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$, whose perpendicular distance from origin is unity.

OR

Find the vector equation of the line passing through the point (1, 2, 3) and parallel to the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ and $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$.

27. एक हॉकी के मैच में, खेल के अंत तक दो टीमों A तथा B ने समान गोल किए, इसलिए मैच का निर्णय करने के लिए रैफरी ने दोनों टीमों के कप्तानों को बारी-बारी से एक पासा फेंकने को कहा, तथा यह निर्णय लिया कि जो कप्तान पहले छः प्राप्त कर लेगा, उसकी टीम को विजयी घोषित किया जाएगा। यदि टीम A के कप्तान को पहले पासा फेंकने को कहा गया, तो प्रत्येक टीम के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए तथा बताइए कि रैफरी का यह निर्णय उचित था या नहीं।

In a hockey match, both teams A and B scored same number of goals up to the end of the game, so to decide the winner, the referee asked both the captains to throw a die alternately and decided that the team, whose captain gets a six first, will be declared the winner. If the captain of team A was asked to start, find their respective probabilities of winning the match and state whether the decision of the referee was fair or not.

28. एक उत्पादक के विचार से पुरुष तथा स्त्री श्रमिक एक ही क्षमता से कार्य करते हैं, इसलिए वह उन्हें समान दैनिक श्रम देता है। उसके पास 30 श्रमिक (पुरुष तथा स्त्री) हैं तथा 17 इकाई पूँजी है, जिनका प्रयोग वह दो प्रकार की वस्तुओं A तथा B के उत्पादन में करता है। वस्तु A की एक इकाई के उत्पादन के लिए दो श्रमिक तथा तीन इकाई पूँजी की आवश्यकता है, जबकि वस्तु B की एक इकाई के उत्पादन के लिए तीन श्रमिक तथा एक इकाई पूँजी की आवश्यकता है। यदि A तथा B का प्रति इकाई विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 100 तथा ₹ 120 है, तो वह अपने साधनों का किस प्रकार उपयोग करे, कि उसे अधिकतम राजस्व मिले। उपर्युक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बना कर आलेख द्वारा हल कीजिए।

क्या आप उत्पादक के इस विचार से सहमत हैं कि पुरुष तथा स्त्री श्रमिक एक ही क्षमता से कार्य करते हैं इसलिए उन्हें समान श्रम देना चाहिए ?

A manufacturer considers that men and women workers are equally efficient and so he pays them at the same rate. He has 30 and 17 units of workers (male and female) and capital respectively, which he uses to produce two types of goods A and B. To produce one unit of A, 2 workers and 3 units of capital are required while 3 workers and 1 unit of capital is required to produce one unit of B. If A and B are priced at ₹ 100 and ₹ 120 per unit respectively, how should he use his resources to maximise the total revenue ? Form the above as an LPP and solve graphically.

Do you agree with this view of the manufacturer that men and women workers are equally efficient and so should be paid at the same rate ?

29. एक रिहाइशी कॉलोनी की प्रबंधन कमेटी ने अपने कुछ सदस्यों (माना x) को ईमानदारी के लिए, कुछ (माना y) को दूसरों से सहयोग करने के लिए तथा अन्य कुछ (माना z) को कॉलोनी की साफ-सफाई के निरीक्षण के लिए पुरस्कृत करने का निर्णय लिया। पुरस्कृत सदस्यों की कुल संख्या 12 है। दूसरों से सहयोग करने वाले तथा निरीक्षण के लिए पुरस्कृत सदस्यों की संख्या के योगफल के तिगुने को ईमानदारी के लिए पुरस्कृत सदस्यों की संख्या के दुगुने में जोड़ने पर 33 आता है। यदि ईमानदारी तथा निरीक्षण के लिए पुरस्कृत सदस्यों की संख्या का योगफल, दूसरों से सहयोग करने वाले पुरस्कृत सदस्यों की संख्या का दुगुना है, तो आव्यूह विधि से प्रत्येक श्रेणी के पुरस्कृत सदस्यों की संख्या ज्ञात कीजिए। उपर्युक्त तीन मूल्यों, ईमानदारी, सहयोग तथा साफ-सफाई के निरीक्षण के अतिरिक्त, एक अन्य मूल्य सुझाइए जो आपके विचार में कॉलोनी की प्रबंधन कमेटी को पुरस्कार देने के लिए शामिल करना चाहिए।

The management committee of a residential colony decided to award some of its members (say x) for honesty, some (say y) for helping others and some others (say z) for supervising the workers to keep the colony neat and clean. The sum of all the awardees is 12. Three times the sum of awardees for cooperation and supervision added to two times the number of awardees for honesty is 33. If the sum of the number of awardees for honesty and supervision is twice the number of awardees for helping others, using matrix method, find the number of awardees of each category. Apart from these values, namely, honesty, cooperation and supervision, suggest one more value which the management of the colony must include for awards.