Code No. 35

Total No. of Questions : 40]   [Total No. of Printed Pages : 16

June/July, 2009

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

Time : 3 Hours 15 Minutes]   [Max. Marks : 100

(Kannada Version)

ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

ii) ವಿಭಾಗ – **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ – **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ – **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ – **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ – **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ – A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $10 \times 1 = 10$

1. $3x \equiv 2 \pmod 6$ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. ಏಕೆ ?

2. $\vec{a}$ ಯ ಡೈರೆಕ್ಷನ್ ಕೊಸೈನ್‌ಗಳು (Direction cosines) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು n ಗಳಾದರೆ n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ I ಯಲ್ಲಿ $*$ ಕ್ರಿಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ $a * b = a^b$, $\forall\, a, b \in I$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯೇ ಅಥವಾ I ಮೇಲಿಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

[Turn over

4. A, B ಗಳು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣ (Order) ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳು. $| A | = 4$, $| B | = 5$ ಆದರೆ, $| AB |$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಣ ದೂರ d ಆಗಿದ್ದು, r_1 , r_2 ಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶವಾಗಬೇಕಾದ (External touch) ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು (Condition) ಬರೆಯಿರಿ.

6. $4x^2 + 9y^2 = 36$ ರ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿ ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\sin^{-1}(\sin 130°)$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ ಆಗುವಂತೆ n ನ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಉತ್ಪನ್ನ $f(x) = | x |$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $Lf'(0)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin^3 x + \cos x)\, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $10 \times 2 = 20$

11. $ca \equiv cb \pmod m$ ಆಗಿದ್ದು c, m ಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ $a \equiv b \pmod m$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ಆದಾಗ, AA' ಯು ಸಮಮಿತಿ (Symmetric) ಮಾತೃಕೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

13. ಅರೆಸಂಕುಲವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. 'ಸಂಕಲನ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5' $(+_5)$ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ ಗಣವು ಅರೆಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

14. Q^+ (ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ) ಗಣದಲ್ಲಿ $*$ ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ $a * b = \frac{ab}{3}$, $\forall\, a, b \in Q^+$ ಆಗಿದೆ. ಅನನ್ಯತಾಂಶ ಮತ್ತು Q^+ ನಲ್ಲಿ a^{-1} ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $\lambda\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಗಳು ಸಮತಲ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ (Coplanar vectors), λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. (0, 0), (3, 0) ಮತ್ತು (0, 4) ಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಬಿಡಿಸಿ : $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} - \cot^{-1}\frac{1}{3}$.

18. $5e^{i\tan^{-1}\frac{4}{3}}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ (Real) ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ (Imaginary) ಭಾಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3, 4 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. $y = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $x^m\ y^n = a^{m+n}$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಉಪಸ್ಪರ್ಶಕವು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜವಾಗಿ (Abscissa) ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\int [\sin(\log x) + \cos(\log x)]\,dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (Origin) ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (Differential equation) ಪಡೆಯಿರಿ.

[Turn over

ವಿಭಾಗ – C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ **ಮೂರು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $3 \times 5 = 15$

23. a) a, b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. (GCD) ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. 275 ಮತ್ತು 726 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

    b) 252 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಬರೆದು ಅದರ ಧನ ಭಾಜಕಗಳೆಷ್ಟು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

24. ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ : $2x - y = 10$

$$x - 2y = 2$$

ಇಲ್ಲಿರುವ ಸಹಾಂಕಗಳ ಕೋಶವು ಕ್ಯಾಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ (Satisfies) ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. 5

25. $\forall\ a, b \in H,\ ab^{-1} \in H$ ಆದಾಗ, G ಸಂಕುಲದ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವಾದ H ಗಣವು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ H ಮತ್ತು K ಗಳು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲಗಳಾದರೆ $H \cap K$ ಕೂಡಾ G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. a) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ $\vec{a}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $\vec{a}$, $\vec{b}$ ಗಳ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ (coplanar with $\vec{a}$ and $\vec{b}$) ಘಟಕ ಸದಿಶ (Unit vector) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

    b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ಆದರೆ,

    $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 5 = 10$

27. a) $x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. 3

b) ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವು (1, 2) ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೇಂದ್ರವು ವೃತ್ತಗಳ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಇದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. 2

28. a) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ ಯ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಾಯಕ (Auxiliary) ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಪರವಲಯ $x = 2t^2$, $y = 4t$ ಯ ನಿಯತದ (Directrix) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\tan 2\theta \tan \theta = 1$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $3 \times 5 = 15$

30. a) ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\sin 2x$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ (Differentiate). 3

b) x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ : $(\sin x)^{\log x}$ 2

31. a) $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\cos^{-1}(1 - 2x^2)$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ. 3

b) ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಾದ $y = 6 + x - x^2$ ಮತ್ತು $y(x-1) = x + 2$ ಗಳು (2, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

32. a) $y = \sin(m \cos^{-1} x)$ ಆದರೆ,

$(1 - x^2)\, y_2 - x y_1 + m^2 y = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\int \frac{1}{x(x^5 + 1)}\, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನುಕಲಿಸಿ (Integrate) :

$$\frac{\sin x + 18 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}$$ 3

b) $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. ಅನುಕಲನ (Integration) ವಿಧಾನದಿಂದ $x^2 + y^2 = 6$ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ – D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಎರಡು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 10 = 20$

35. a) $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಅತಿಪರವಲಯಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಲು ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ (Derive). ಇದಲ್ಲದೆ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $x - y + 5 = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗುವಂತೆ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$ ಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + bc \\ 1 & b & b^2 + ca \\ 1 & c & c^2 + ab \end{vmatrix} = 2(a - b)(b - c)(c - a)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

36\. a) ಡಿ ಮೋಯ್ವರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಘಾತವು ಧನ, ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುವಾಗ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ ಆದಾಗ $\dfrac{Z^{10} - 1}{Z^{10} + 1} = i\tan 5\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) $\cos 2\theta = \sqrt{2}\,(\cos\theta - \sin\theta)$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

37\. a) ಒಂದು ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಹೆಚ್ಚುವ ದರ 4π c.c./sec. ಆಗಿದೆ. ಘನಫಲವು 288π ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಹೆಚ್ಚುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದಲ್ಲದೆ

(i) 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಘನಫಲದಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು (ii) ಘನಫಲ 288π ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಘನಫಲವು ಹೆಚ್ಚುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) (1, 5) ಮತ್ತು (1, 1) ಬಿಂದುಗಳು ನಾಭಿ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವ ಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38 a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) $xy\,(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 1$ ರ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ (Particular) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $x = 1, y = 0$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. 4

ವಿಭಾಗ – E

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಒಂದು** ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $1 \times 10 = 10$

39\. a) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$ ಆದರೆ, $\vec{a} + \vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

b) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಯ ವಿಕರ್ಣವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

c) $\left(16\ cis\ \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{4}}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

40. a) $2^{150} \times 3^{12} \times 135 \equiv a \pmod 7$ ಆದರೆ, a ಯನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

b) $2(x^2 + y^2) - 12x - 4y + 10 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 5x - 13y + 16 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ 'ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ'ದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}\, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

(English Version)

Instructions : i) The question paper has *five* **Parts – A, B, C, D** and **E.** Answer all the Parts.

ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks, **Part – C** carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and **Part – E** carries 10 marks.

PART – A

Answer *all* the *ten* questions : $10 \times 1 = 10$

1. $3x \equiv 2 \pmod 6$ has no solution. Why ?

2. If direction cosines of $\vec{a}$ are $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ and n, find n.

3. On I (the set of all integers), and operation $*$ is defined by $a * b = a^b$, $\forall\ a, b \in I$. Examine whether $*$ is binary or not on I.

4. A and B are square matrices of the same order and $|A| = 4$, $|B| = 5$. Find $|AB|$.

5. Given two circles with radii r_1 , r_2 and having d as the distance between their centres, write the condition for them to touch each other externally.

6. Find the sum of the focal distances of any point on $4x^2 + 9y^2 = 36$.

7. Evaluate $\sin^{-1}(\sin 130°)$.

[Turn over

8. Find the least positive integer n for which $\left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^{n} = 1$.

9. Given the function $f(x) = |x|$, find $Lf'(0)$.

10. Evaluate $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin^3 x + \cos x)\, dx$.

PART – B

Answer any *ten* questions : 10 × 2 = 20

11. If $ca \equiv cb \pmod{m}$ and c, m are relatively prime then prove that $a \equiv b \pmod{m}$

12. For the matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, verify that AA' is symmetric.

13. Define a semigroup. Examine whether $\{1, 2, 3, 4\}$ is a semigroup under 'addition modulo 5' $(+_5)$.

14. On Q^+ (set of all +*ve* rationals) , an operation $*$ is defined by $a * b = \frac{ab}{3}$, $\forall\, a, b \in Q^+$. Find the identity element and a^{-1} in Q^+.

15. If $\lambda\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ are coplanar, find λ.

16. Find the equation of the circumcircle of the triangle formed by (0, 0), (3, 0) & (0, 4).

17. Solve $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \cot^{-1} \dfrac{1}{3}$.

18. Show that the real and imaginary parts of $5e^{i \tan^{-1} \frac{4}{3}}$ are 3, 4 respectively.

19. If $y = \sin^{-1} \left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) + \sec^{-1} \left(\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$, prove that $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

20. At any point on the curve $x^m \; y^n = a^{m+n}$, show that the subtangent varies as the abscissa of the point.

21. Evaluate $\int [\sin (\log x) + \cos (\log x)] \, dx$.

22. Form the differential equation of the family of circles touching y-axis at origin.

PART – C

I. Answer any *three* questions : $3 \times 5 = 15$

23. a) Define GCD of two integers a and b. Find the GCD of 275 and 726. 3

b) Find the number of positive divisors of 252 by writing it as the product of primes (prime power factorisation). 2

24. Solve by matrix method : $2x - y = 10$

$$x - 2y = 2$$

Also, verify that the coefficient matrix of this system satisfies Cayley-Hamilton theorem. 5

25. Prove that a non-empty subset H of a group G, is a subgroup of G, if $\forall\ a, b \in H,\ ab^{-1} \in H$. Hence prove that, if H and K are subgroups of a group G then $H \cap K$ also, is a subgroup of G. 5

26. a) Given $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, find a unit vector perpendicular to $\vec{a}$ and coplanar with $\vec{a}$ and $\vec{b}$. 3

b) If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, prove that $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$. 2

II. Answer any *two* questions : $2 \times 5 = 10$

27. a) Derive the condition for the two circles

$x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$ and

$x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ to cut each other orthogonally. 3

b) (1, 2) is the radical centre of three circles. One of the circles is $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$. Examine whether the radical centre lies inside or outside all the circles. 2

28. a) Given the equation of the conic

$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$, find its centre and the area of its auxiliary circle. 3

b) Obtain the equation of the directrix of the parabola $x = 2t^2$, $y = 4t$. 2

29. a) If $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$, prove that

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. 3

b) Find the general solution of $\tan 2\theta \tan \theta = 1$. 2

III. Answer any *three* of the following questions : $3 \times 5 = 15$

30. a) Differentiate $\sin 2x$ w.r.t. x from first principle. 3

b) Differentiate $(\sin x)^{\log x}$ w.r.t x. 2

31. a) Differentiate $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ w.r.t. $\cos^{-1}(1 - 2x^2)$. 3

b) Show that the curves $y = 6 + x - x^2$ and $y(x - 1) = x + 2$ touch each other at (2, 4). 2

32. a) If $y = \sin(m \cos^{-1} x)$, prove that

$(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$. 3

b) Evaluate $\int \frac{1}{x(x^5 + 1)}\, dx$. 2

33. a) Integrate $\dfrac{\sin x + 18 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}$ w.r.t. x. 3

b) Evaluate $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx$. 2

34. Find the area of $x^2 + y^2 = 6$ by integration. 5

PART – D

Answer any *two* of the following questions : 2 × 10 = 20

35. a) Derive a condition for $y = mx + c$ to be a tangent to the hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Also, find the point of contact. Using the condition derived, find the equations of tangents to $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{12} = 1$, which are parallel to $x - y + 5 = 0$. 6

b) Prove that

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + bc \\ 1 & b & b^2 + ca \\ 1 & c & c^2 + ab \end{vmatrix} = 2(a - b)(b - c)(c - a).$$ 4

36. a) State De Moivre's theorem. Prove it for positive and negative integral indices. Using it prove that $\dfrac{Z^{10} - 1}{Z^{10} + 1} = i \tan 5\theta$ if

$Z = \cos\theta + i \sin\theta$. 6

b) Find the general solution of $\cos 2\theta = \sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta)$. 4

37. a) The volume of a sphere increases at the rate of 4π c.c./sec. Find the rates of increase of its radius and surface area when its volume is $288\,\pi$ c.c. Also find (i) the change in volume in 5 secs, (ii) rate of increase of volume w.r.t. radius when the volume is $288\,\pi$ c.c. 6

b) Obtain the equations of parabolas having (1, 5) and (1, 1) as ends of the latus rectum. 4

38. a) Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$. 6

b) Find the particular solution of $xy\,(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - y^2 = 1$, given that, when $x = 1$, $y = 0$. 4

PART – E

Answer any *one* of the following questions : $1 \times 10 = 10$

39. a) If $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$, find the angle between $\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{c}$. 4

b) Among all right-angled triangles of a given hypotenuse, show that the triangle which is isosceles has maximum area. 4

c) Find the fourth roots of $16\,cis\,\frac{\pi}{2}$. 2

[Turn over

40. a) If $2^{150} \times 3^{12} \times 135 \equiv a \pmod 7$, find the least positive remainder when a is divided by 7. 4

b) Given the circles $2(x^2 + y^2) - 12x - 4y + 10 = 0$ and $x^2 + y^2 + 5x - 13y + 16 = 0$, find the length of their common chord. 4

c) Evaluate $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{x}}\, dx$. 2