Total No. of Questions : 40]

Code No. 35

Total No. of Printed Pages : 16]

March, 2011

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

Time : 3 Hours 15 Minutes]

[Max. Marks : 100

(Kannada Version)

ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ಐದು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ – A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $10 \times 1 = 10$

1. $6x \equiv 3$ (ಮಾಡ್ 15) ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಎಷ್ಟು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ ?

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, $A + A'$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ R ನಲ್ಲಿ $*$ ಕ್ರಿಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ $a * b = a + b + 5, \ \forall \ a, b \in R$ ಆಗಿದೆ. ಈ $*$ ಕ್ರಿಯೆಯು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯೇ ಅಥವಾ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

[Turn over

4. $\vec{AB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{OA} = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ಆದರೆ, B ನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $P(1, 1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x^2 + 3y^2 + 6x + 9y - 2 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2 = 4ax$ ಪರವಲಯಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾದರೆ, ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

7. $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $e^{i\pi}$ ನ ಊಹ್ಯ ಭಾಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $y = \sin\left(2\sin^{-1}x\right)$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $\int_0^{\pi/2} \sec^2 x \, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $10 \times 2 = 20$

11. $a \mid bc$ ಮತ್ತು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. (G.C.D.) 1 ಆದರೆ, $a \mid c$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದಾಗ, AB' ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $G = \{ 1, \omega, \omega^2 \}$, ω ವು ಏಕತೆಯ ಘನಮೂಲವಾಗಿದೆ. ಗುಣಾಕಾರ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ω^2 ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$, $\forall\, a, b \in G$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳಾದ ಬಿಂದುಗಳು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $(5, - 7)$ ಮತ್ತು $(7, - 5)$ ಬಿಂದುಗಳು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳಾಗಿವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$; $-1 \le x \le 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. $x = \cos A + i \sin A$, $y = \cos B + i \sin B$ ಆದರೆ, $xy - \frac{1}{xy} = 2\, i \sin (A + B)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. $y = \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right]$ ಆದರೆ, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $y^2 = 3 - 4x$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು, $2x + y - 2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದಾಗ, ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವು m ಆಗಿದ್ದು, ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ (Origin) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೂಹದ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಲ್ ಈಕ್ವೇಷನ್) ರೂಪಿಸಿ.

ವಿಭಾಗ – C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ **ಮೂರು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $3 \times 5 = 15$

23. a) 189 ಮತ್ತು 243 ರ ಮಹತ್ತರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು (G.C.D.) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $m, n \in z$ ಆದಾಗ, ಅದನ್ನು $189\,m + 243\,n$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. 3

b) 2000 ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

24. a) $\begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 1 & bc & b+c \\ 1 & ca & c+a \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) ಕ್ರೇಮರನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$x - 2y = 8$ ಮತ್ತು $2x - y = 7$. 2

25. $Q - \{-1\}$, -1 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು, $*$ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯು $Q - \{-1\}$ ಮೇಲಿನ $a * b = a + b + ab$, $\forall\ a, b \in Q - \{-1\}$ ಆದಾಗ, $(Q - \{-1\}, *)$ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. a) $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ಮತ್ತು

$\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ ಆದರೆ, $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳಿಗೆ ಸಮತಲವಾಗಿ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $A \equiv (2, -3, 6)$ ಮತ್ತು $B \equiv (3, -1, -6)$ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರುವ $\overrightarrow{AB}$ ಸದಿಶದ ದಿಶಾ ಕೊಸೈನ್‌ಗಳನ್ನು (ಡೈರೆಕ್ಷನ್ ಕೊಸೈನ್) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 5 = 10$

27. a) $x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 3

b) $(2, 1)$ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ಮತ್ತು $3x + 4y - 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$ ಶಂಕುಜದ ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $y^2 = 4ax$ ಪರವಲಯದ ಮೇಲಿನ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅದರ ನಾಭಿ $(a, 0)$ ಗೆ ಇರುವ ದೂರವು $x_1 + a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

29. a) $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \cos^{-1}\left(x\sqrt{3}\right)$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ. 3

b) $\tan^2 x - 4\sec x + 5 = 0$ ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $3 \times 5 = 15$

30. a) ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ x ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ cosec ($4x$) ಅನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿ. 3

b) $y = (\tan x)^{\sin^{-1} x}$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. a) $\cos^{-1}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ಅನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿ. 3

b) $y = x\left(x^2 - 4\right)$ ಮತ್ತು $y = 2x^2 - 3x - 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಛೇದನದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು (1, – 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

32. a) $y = \sin\left(m \tan^{-1} x\right)$ ಆದಾಗ,

$\left(1 + x^2\right)^2 y_2 + 2x\left(1 + x^2\right) y_1 + m^2 y = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 8}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\int \frac{3x}{1+2x^4}\, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. ಅನುಕಲನ ವಿಧಾನದಿಂದ $x^2 + y^2 = a^2$ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ – D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 10 = 20$

35. a) ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಆದರ್ಶ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $A = \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ A^{-1} ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

36. a) n ನ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಮೇಯ ಸೂಚಕಾಂಕಗಳಿಗೆ ಡಿ ಮೋಯ್‌ವ್ರೆ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$ ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

37. a) 170 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಮನುಷ್ಯನು 4 ಮೀ. /ಸೆಕೆಂಡ್ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿತಿಜಾಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೀಪದ ಕಂಬದಿಂದ ದೂರ ನಡೆಯುವನು. 8·5 ಮೀ. ಎತ್ತರದ ಕಂಬದ ದೀಪದಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜಾಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ

i) ಆತನ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ ಮತ್ತು

ii) ಆತನ ನೆರಳಿನ ತುದಿಯ ಚಲನೆಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) ಸದಿಶ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

38. a) $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} \, dx = \frac{\pi^2}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 6

b) $(2y - 1)\,dx - (2x + 3)\,dy = 0$ ಈ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

ವಿಭಾಗ – E

$1 \times 10 = 10$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

39\. a) $\sqrt{3} + i$ ನ ಘನ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. 4

b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c) ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ $32 \times 127 \times 44$ ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

(ಶೇಷವು ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬೇಕು)

40\. a) ಒಂದು ಆಯತದ ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ. ಆ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಚಚ್ಚೌಕವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ತೋರಿಸಿ. 4

b) $\int \tan^4 x \, dx$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c) $y = \log_6 \sqrt{\cos x}$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

(English Version)

Instructions : i) The question paper has *five* **Parts – A, B, C, D** and **E.** Answer all the parts.

ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks, **Part – C** carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and **Part – E** carries 10 marks.

PART – A

Answer *all* the *ten* questions : $10 \times 1 = 10$

1. Find the number of incongruent solutions of $6x \equiv 3 \pmod{15}$.

2. If $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, find $A + A'$.

3. On R [the set of all real numbers] an operation $*$ is defined by $a * b = a + b + 5$, $\forall\ a, b \in R$. Examine whether $*$ is a binary operation or not.

4. If $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ and $\overrightarrow{OA} = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$, find the position vector of B.

5. Find the length of the tangent to the circle $3x^2 + 3y^2 + 6x + 9y - 2 = 0$ from the point $P(1, 1)$.

6. If $y = mx + c$ touches the parabola $y^2 = 4ax$, then write the coordinates of the point of contact.

7. Evaluate : $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

8. Find the imaginary part of $e^{i\pi}$.

9. If $y = \sin\left(2\sin^{-1}x\right)$, find $\frac{dy}{dx}$.

10. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$.

PART - B

Answer any *ten* questions : $10 \times 2 = 20$

11. If $a|bc$ and the G.C.D. of a and b is 1, then prove that $a|c$.

12. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, find AB'.

13. Construct the multiplication table for $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, where ω is a cube root of unity. Find the inverse of ω^2.

14. Prove that, in a group $(G, *)$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$, $\forall\ a, b \in G$.

15. Show that the points whose position vectors are $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$,

$\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ form a right angled triangle.

16. Find the equation of the circle which is described on the diameter whose end points are $(5, -7)$ and $(7, -5)$.

17. Prove that $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$; $-1 \leq x \leq 1$.

18. If $x = \cos A + i \sin A$, $y = \cos B + i \sin B$, then show that

$$xy - \frac{1}{xy} = 2\, i \sin (A + B).$$

19. If $y = \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right]$, prove that $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

20. Find the point on the curve $y^2 = 3 - 4x$, where the tangent is parallel to the line $2x + y - 2 = 0$.

21. Evaluate : $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \,.\, \sin^2 x}\, dx$.

22. Form the differential equation for the family of straight lines passing through the origin having slope m.

[Turn over

PART – C

I. Answer any *three* questions : $3 \times 5 = 15$

23. a) Find the G.C.D. of 189 and 243. Express it in the form $189\,m + 243\,n$, where $m, n \in z$. 3

b) Find the number positive divisors of 2000. 2

24. a) Prove that $\begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 1 & bc & b+c \\ 1 & ca & c+a \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$. 3

b) Solve by Cramer's Rule : $x - 2y = 8$ and $2x - y = 7$. 2

25. Let $Q - \{-1\}$ be the set of rational numbers except -1 and $*$ be a binary operation on $Q - \{-1\}$ defined by $a * b = a + b + ab$, $\forall\, a, b \in Q - \{-1\}$. Show that $(Q - \{-1\}, *)$ is an Abelian group. 5

26. a) Given that the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and $\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$, find a unit vector coplanar with $\vec{a}$ and $\vec{b}$ but perpendicular to $\vec{c}$. 3

b) Find the direction cosines of the vector $\vec{AB}$, where $A \equiv (2, -3, 6)$ and $B \equiv (3, -1, -6)$. 2

II. Answer any *two* questions : $2 \times 5 = 10$

27. a) Derive the equation of the radical axis of two circles

$$x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0.$$

Also show that the radical axis of the two circles is perpendicular to the line joining their centres. 3

b) Find the equation of the circle having its centre at (2, 1) and touching the line $3x + 4y - 5 = 0$. 2

28. a) Find the foci of the conic $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$. 3

b) Show that the distance of any point (x_1, y_1) on the parabola $y^2 = 4ax$ from the focus (a, 0) is $x_1 + a$. 2

29. a) Solve : $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \cos^{-1}\left(x\sqrt{3} \right)$. 3

b) Find the general solution of $\tan^2 x - 4 \sec x + 5 = 0$. 2

III. Answer any *three* of the following questions : $3 \times 5 = 15$

30. a) Differentiate cosec ($4x$) with respect to x, using first principles. 3

b) If $y = (\tan x)^{\sin^{-1} x}$, find $\frac{dy}{dx}$. 2

31. a) Differentiate $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ with respect to $\cos^{-1}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$. 3

b) Find the angle of intersection of the curves $y = x\left(x^2 - 4\right)$ and $y = 2x^2 - 3x - 2$ at $(1, -3)$. 2

32. a) If $y = \sin\left(m \tan^{-1} x\right)$, then show that $\left(1 + x^2\right)^2 y_2 + 2x\left(1 + x^2\right) y_1 + m^2 y = 0$. 3

b) Evaluate : $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 8}$. 2

33. a) Evaluate : $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\,dx$. 3

b) Evaluate : $\int \frac{3x}{1 + 2x^4}\,dx$. 2

34. Find the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ by the method of integration. 5

PART – D

Answer any *two* of the following questions : $2 \times 10 = 20$

35. a) Define an ellipse as a locus. Derive its equation in standard form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a > b)$. 6

b) Find A^{-1} using Cayley-Hamilton theorem if $A = \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$. 4

36. a) State and prove De Moivre's theorem for all rational values of n. 6

b) Find the general solution of $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$. 4

37. a) A man 170 cm tall, walks at the rate of 4 m/sec away from the source of light which is hung 8·5 m above the horizontal ground.

i) How fast is the length of his shadow increasing ?

ii) How fast is the tip of his shadow moving ? 6

b) Prove for any triangle ABC, the sine rule $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ by vector method. 4

38. a) Show that $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} \, dx = \frac{\pi^2}{4}$. 6

b) Solve : $(2y - 1)\,dx - (2x + 3)\,dy = 0$. 4

PART - E

Answer any *one* of the following questions : $1 \times 10 = 10$

39. a) Find the cube roots of $\sqrt{3} + i$. Respresent them on the Argand diagram. 4

b) Find the length of the common chord of the two intersecting circles $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ and $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$. 4

c) Find the remainder obtained when $32 \times 127 \times 44$ is divided by 7 using the method of congruences.

(The remainder should be least positive) 2

40. a) The sum of the four sides of a rectangle is constant: Show that the area of the rectangle is maximum when it is a square. 4

b) Evaluate : $\int \tan^4 x \, dx$. 4

c) If $y = \log_6 \sqrt{\cos x}$, find $\frac{dy}{dx}$. 2