

Code No. **35**

Total No. of Questions : 40]

[Total No. of Printed Pages : 16

June, 2008

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

Time : 3 Hours 15 Minutes]

[Max. Marks : 100

(Kannada Version)

- ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1. $9x \equiv 21 \pmod{30}$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಎಷ್ಟು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ ?

2. $\left| \begin{array}{cc} 4321 & 4322 \\ 4323 & 4324 \end{array} \right|$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಸಮುದಾಯ $(Z_6, + \pmod{6})$ ರಲ್ಲಿ $2 +_6 4^{-1} +_6 3^{-1}$ ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

[Turn over

4. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನೀಯ ಸದಿಶಗಳು $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ಆದಾಗ, P ಯು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದು P ನ ಸ್ಥಾನೀಯ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. y -ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿರುವ ಮತ್ತು $(a, 0)$ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$ ರ ನಿಯತ ರೇಖೆಗೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $\cos^{-1}(\sin 330^\circ)$ ಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?
8. $1, \omega, \omega^2$ ಗಳು ಏಕಕದ ಘನಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(1 + \omega - \omega^2)^2$ ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?
9. $y = e^{\sqrt{x}} + x\sqrt{e}$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $\int e^x \left(\frac{1 + \tan x}{\cos x} \right) dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 2 = 20

11. 352 ಮತ್ತು 891 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. (G.C.D.) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ಸದಿಶಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
15. ಒಂದು ಪರವಲಯದ ನಾಭಿ (3, 2) ಮತ್ತು ನಿಯತ ರೇಖೆ $x = 1$ ಆದಾಗ, ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
16. $\sin \left[2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right] = \sqrt{1-x^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
17. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $y = x$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವನ್ನುಳ್ಳ ಹಾಗೂ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
18. $(1 - i)^9 = 16 - 16i$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
19. $y = \log_e \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{cosec} x$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
20. $y^2 = x$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು x -ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 45° ಯಷ್ಟು ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
21. $\int_0^1 x(1-x)^7 dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
22. $(y - 2)^2 = 4a(x + 1)$ ಸಮೀಕರಣದ ಸ್ಥಿರವನ್ನು ವಿಲೋಮಗೊಳಿಸಿ, ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

23. a) 756 ರ ಒಟ್ಟು ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) a/bc ಮತ್ತು $(a, b) = 1$ ಆದಾಗ a/c ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

24. $3x + y + 2z = 3$

$$2x - 3y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 4$$

ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

25. ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣ z ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ $*$ ನ್ನು $a * b = a + b + 3$, $\forall a, b \in z$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, ಇದು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. a) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, \vec{a} ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ \vec{b} ಮತ್ತು \vec{c} ಮೇಲಿನ ಏಕಮಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಇವು ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : 2 × 5 = 10

27. a) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ (x_1, y_1) ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $3x - 4y + 6 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) $9x^2 + 5y^2 - 36x + 10y - 4 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿ ಮತ್ತು ನಿಯತ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $= \frac{14}{3}$ ಮತ್ತು $e = \frac{4}{3}$ ಇರುವ ಅತಿಪರವಲಯ (Hyperbola) ದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ,

$xy + yz + zx = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\sin^2 \theta - \cos 2\theta = \frac{5}{4}$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

30. a) x ಅನ್ನು ಕುರಿತು a^x ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $y = \tan^{-1} \left(\frac{4x}{4-x^2} \right)$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{4+x^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

31. a) $y = (\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$ ಆದಾಗ,

$(1-x^2) y_2 - xy_1 - 4 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $x = 3 \sin 2\theta + 2 \sin 3\theta$ ಮತ್ತು

$y = 2 \cos 3\theta - 3 \cos 2\theta$ ಆದಾಗ,

$\frac{dy}{dx} = -\tan \frac{\theta}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

[Turn over

32. a) $y = e^{\frac{x}{a}}$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು ನಿಯತ ರೇಖೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) $\int \frac{2 - 3 \tan x}{1 + 2 \tan x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\int \frac{1}{(1 + e^x)(1 - e^{-x})} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. ದೀರ್ಘವೃತ್ತ $9x^2 + 16y^2 = 144$ ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅನುಕಲನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 10 = 20$

35. a) ಒಂದು ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿ ಅತಿಪರವಲಯದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಆದರ್ಶ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿಜವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ. 6

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (a^3 - 1)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

36. a) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ ಆದಾಗ

i) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$$

ii) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{3}{2}$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{3}{2} \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.} \quad 6$$

b) $[\vec{a} \times \vec{b} \vec{b} \times \vec{c} \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

37. a) ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 8 ಚ.ಸೆ.ಮೀ. /ಸೆ.ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದೆ. ಆ ಗೋಳದ ಗಾತ್ರವು $\frac{500\pi}{3}$ ಘ.ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$xy \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} (1+x+x^2) . \quad 4$$

[Turn over

ವಿಭಾಗ - E

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

1 × 10 = 10

39. a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ ಮತ್ತು $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ ಮತ್ತು $|\vec{c}| = 7$

ಆದಾಗ, \vec{a} ಮತ್ತು \vec{b} ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

b) $\sqrt{3} - i$ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗ್ಯಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ.

4

c) 2^{202} ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

40. a) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೊತ್ತ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಈ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\frac{\pi}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4

b) $\int \cot^4(3x) dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

c) $y = \log_5 \sqrt{1-x^2}$ ಅನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ.

2

(English Version)

- Instructions :* i) The question paper has *five Parts – A, B, C, D and E.*
Answer all the parts.
- ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks,
Part – C carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and
Part – E carries 10 marks.

PART – A

Answer *all the ten* questions.

10 × 1 = 10

1. Find the number of incongruent solutions of $9x \equiv 21 \pmod{30}$.
2. Evaluate $\begin{vmatrix} 4321 & 4322 \\ 4323 & 4324 \end{vmatrix}$.
3. In a group $(Z_6, + \pmod{6})$, find $2 +_6 4^{-1} +_6 3^{-1}$.
4. Find the position vector of the point P which is the mid-point AB where the position vectors of A and B are $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ and $3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$.
5. Find the equation to a circle whose centre is $(a, 0)$ and touching the y -axis.
6. Find the equation to directrix of $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$.
7. Find the value of $\cos^{-1}(\sin 330^\circ)$.

[Turn over

8. If $1, \omega, \omega^2$ are the cube roots of unity, find the value of $(1 + \omega - \omega^2)^2$

9. If $y = e^{\sqrt{x}} + x\sqrt{e}$, find $\frac{dy}{dx}$.

10. Evaluate $\int e^x \left(\frac{1 + \tan x}{\cos x} \right) dx$.

PART - B

Answer any ten questions.

$10 \times 2 = 20$

11. Find the G.C.D. of 352 and 891.

12. Find the characteristic roots of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

13. Prove that a group of order three is Abelian.

14. Find the volume of the parallelepiped whose co-terminus edges are the vectors $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.

15. Find the equation to the parabola whose focus is $(3, 2)$ and its directrix is $x = 1$.

16. Prove that

$$\sin \left[2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right] = \sqrt{1-x^2}.$$

17. Find the equation of a circle passing through the origin, having its centre on the line $y = x$ and cutting orthogonally the circle

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0.$$

18. Prove that $(1 - i)^9 = 16 - 16i$.

19. If $y = \log_e \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)$, then prove that $\frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{cosec} x$.

20. Find the point on the curve $y^2 = x$ the tangent at which makes an angle of 45° with the x -axis.

21. Evaluate $\int_0^1 x(1-x)^7 dx$.

22. Form the differential equation by eliminating the arbitrary constant

$$(y - 2)^2 = 4a(x + 1).$$

PART - C

- I. Answer any *three* questions : 3 × 5 = 15

23. a) Find the number of positive divisors and sum of all such positive divisors of 756. 3

- b) If a/bc and $(a, b) = 1$, then prove that a/c . 2

[Turn over

24. Solve by matrix method :

$$3x + y + 2z = 3$$

$$2x - 3y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 4.$$

5

25. Prove that the set \mathbb{Z} of integers is an Abelian group under binary operation $*$ defined by $a * b = a + b + 3, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

5

26. a) If $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$, find a unit vector perpendicular to \vec{a} and in the same plane on \vec{b} and \vec{c} .

3

b) Find the area of a parallelogram whose diagonals are the vectors $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

2

II. Answer any *two* questions :

2 × 5 = 10

27. a) Find the length of the tangent from the point (x_1, y_1) to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

3

b) Find the equations of tangent to the circle

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0, \text{ which are perpendicular to}$$

$$3x - 4y + 6 = 0.$$

2

28. a) Find the focus and equation to the directrix of the ellipse

$$9x^2 + 5y^2 - 36x + 10y - 4 = 0. \quad 3$$

- b) Find the equation to the hyperbola in the standard form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ given that length of latus rectum} = \frac{14}{3} \text{ and}$$

$$e = \frac{4}{3}. \quad 2$$

29. a) If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$, prove that

$$xy + yz + zx = 1. \quad 3$$

- b) Find the general solution of $\sin^2 \theta - \cos 2\theta = \frac{5}{4}$. 2

III. Answer any *three* of the following questions :

$3 \times 5 = 15$

30. a) Differentiate a^x w.r.t. x by first principles. 3

- b) If $y = \tan^{-1} \left(\frac{4x}{4-x^2} \right)$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{4+x^2}$. 2

31. a) If $y = (\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$, prove that

$$(1-x^2) y_2 - xy_1 - 4 = 0. \quad 3$$

- b) If $x = 3 \sin 2\theta + 2 \sin 3\theta$, and

$$y = 2 \cos 3\theta - 3 \cos 2\theta,$$

prove that $\frac{dy}{dx} = -\tan \frac{\theta}{2}$. 2

[Turn over

32. a) Prove that in the curve $y = e^{\frac{x}{a}}$ the subnormal varies as the square of the ordinate and subtangent is constant. 3

b) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$. 2

33. a) Evaluate $\int \frac{2 - 3 \tan x}{1 + 2 \tan x} dx$. 3

b) Evaluate $\int \frac{1}{(1 + e^x)(1 - e^{-x})} dx$. 2

34. Find the area of the ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ by integration. 5

PART - D

Answer any *two* of the following questions :

$2 \times 10 = 20$

35. a) Define hyperbola as a locus and derive the standard equation of the hyperbola in the form $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 6

b) Prove that $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (a^3 - 1)^2$. 4

36. a) If $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$, prove that

i) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$$

ii) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{3}{2}$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{3}{2} . \quad 6$$

b) Prove that $[\vec{a} \times \vec{b} \vec{b} \times \vec{c} \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$. 4

37. a) The surface area of a sphere is increasing at the rate of 8 sq.cm/sec.

Find the rate at which the radius and the volume of the sphere are increasing when the volume of the sphere is $\frac{500\pi}{3}$ c.c. 6

b) Find the general solution of $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$. 4

38. a) Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 6

b) Find the general solution of the differential equation

$$xy \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} (1+x+x^2) . \quad 4$$

[Turn over

PART – EAnswer any *one* of the following questions :

1 × 10 = 10

39. a) If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ and $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ and $|\vec{c}| = 7$,
find the angle between \vec{a} and \vec{b} . 4

b) Find the cube roots of a complex number $\sqrt{3} - i$ and represent
them in argand diagram. 4

c) Find the remainder when 2^{202} is divided by 11 (least positive
remainder). 2

40. a) The sum of the lengths of a hypotenuse and another side of a right
angled triangle is given. Show that the area of the triangle is
maximum when the angle between these sides is $\frac{\pi}{3}$. 4

b) Evaluate $\int \cot^4(3x) dx$. 4

c) Differentiate w.r.t. x :

$$y = \log_5 \sqrt{1 - x^2} . \quad 2$$
