વિષય : ગણિત (028)

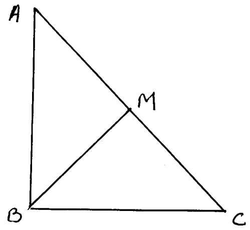
નમૂનાના પ્રશ્નો અને જવાબ

પ્ર-1. (અ) (1) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર વેધ દોરવામાં આવે તો તેથી બનતા બે ત્રિકોણો પરસ્પર સમરૂપ અને તે દરેક મૂળ ત્રિકોણની સમરૂપ હોય છે.

જવાબ : પક્ષ : Δ ABC માં $\angle$B કાટકોણ છે અને $\overline{BM}$ એ કર્ણ $\overline{AC}$ પરનો વેધ છે.

સાધ્ય : (i) ΔAMB ~ ΔBMC (ii) ΔAMB ~ Δ ABC (iii) ΔBMC ~ Δ ABC

આકૃતિ :



સાબિતી : Δ ABC માં $\angle B = 90^0$ તથા $\overline{BM}$ એ કર્ણ $\overline{AC}$ પરનો વેધ છે. M લંબપાદ છે. (પક્ષ)

$\therefore$ બાકીના $\angle A$ અને $\angle C$ લઘુકોણ છે.

$\therefore$ A-B-C

$\therefore \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA}$

$\therefore \angle BAM \cong \angle BAC,$ અને $\angle BCM \cong \angle BCA$..........$(i)$

હવે

$\angle AMB \cong \angle ABC$ (કાટખૂણા)

$\angle BAM \cong \angle BAC$ પરિણામ (i)

$\therefore AMB \longleftrightarrow ABC$ સમરૂપતા છે. (ખૂ.ખૂ.)

$\therefore \Delta AMB \sim \Delta ABC$

$\therefore \angle BCM \cong \angle BCA$ (પરિણામ)

$\angle BMC \cong \angle ABC$ (કાટખૂણા)

$\therefore \Delta MBC \longleftrightarrow ABC$ સમરૂપતા છે.

$\therefore \angle BMC \cong \angle ABC$ (ખૂ.ખૂ.)

આમ,

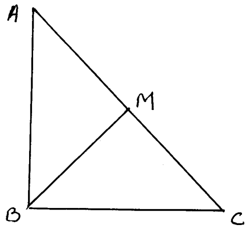
Δ AMB ~ ΔABC અને Δ BMC ~ Δ ABC હોવાથી AMB $\longleftrightarrow$ BMC સમરૂપતા છે. આથી Δ ABC ~ Δ ABC.

પ્ર-1. (અ) (2) ΔABCમાં $\angle$B કાટકોણ છે. $\overline{BM}$ એ કર્ણ $\overline{AC}$ પરનો વેધ છે સાબિત કરો કે (1) BM^2 = AM x CM (1) AB^2= AMxAC (૩) BC^2= CM x AC

જવાબ : પક્ષ : Δ ABC માં $\angle$B કાટકોણ છે તથા $\overline{BM}$ એ કર્ણ $\overline{AC}$ પરનો વેધ છે.

સાધ્ય : (i) $AB^2 = AM \times AC$ (ii) $BM^2 = AM \times CM$ (iii) BC^2 = CM x AC

આકૃતિ :



સાબિતી : Δ ABC માં $\angle$B કાટકોણ છે. $\overline{BM}$ એ કર્ણ $\overline{AC}$ પરનો વેધ છે. (પક્ષ)

$\therefore AMB \leftrightarrow BMC,$ સમરૂપતા છે. (પ્રમેય 8)

$$\frac{AM}{BM} = \frac{BM}{CM} = \therefore BM^2 = AM \times CM$$

આમ, BM એ AM અને CM નો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

હવે, AMB $\leftrightarrow$ ABC સમરૂપતા છે.

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AC} = \therefore AB^2 = AM \times AC$$

આમ, AB એ AM અને AC નો ગુણોત્તર મધ્યક છે. એજ રીતે $BMC \leftrightarrow ABC$ સમરૂપતા છે.

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CM}{BC}$$

$$\therefore BC^2 = CM \times AC$$

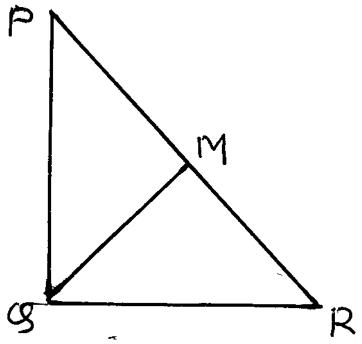
આમ, BC એ CM અને AC નો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

પ્ર-1. (અ) (3) Δ PQR માં $\angle$Q કાટકોણ છે તો સાબિત કરો કે $PR^2 = PQ^2 + QR^2$

જવાબ : પક્ષ : Δ PQR માં $\angle$Q કાટકોણ છે

સાધ્ય : $PR^2 = PQ^2 + QR^2$

આકૃતિ :



સાબિતી : Δ PQR માં $\angle$Q કાટકોણ છે. (પક્ષ) $\overline{QM}$ એ કર્ણ $\overline{PR}$ પરનો વેધ છે. (પક્ષ)

P-M-R તથા PM + MR = PR..............(i)

PQ^2 = PM $\times$ PR..............(ii)

$PQ^2 + QR^2$

= PM $\times$ PR + MR$\times$PR (પરિણામ 2)

= PR (PM + MR)

= PR $\times$PR (પરિણામ **1**)

= PR^2

પ્રશ્ન - ૧ (બ) અવયવ પાડો.

(1) $a^3 + b^3 + c^3 + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

$= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$

$= a^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^3 + b^2c + c^2a + c^2b + c^3$

$= a^2(a+b+c) + b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c)$

$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$

(2) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + a^3 + b^3 + c^3$

$= a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + a^3 + b^3 + c^3$

$= a^3 + a^2b + a^2c + b^3 + b^2c + ab^2 + c^3 + ac^2 + bc^2$

$= a^2(a+b+c) + b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c)$

$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$

(3) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= x^3 - (y+z)^3 + 3yz(y+z) - 3xyz$

$= [x+y+z][x^2 - x(y+z) + (y+z)^2] - 3yz[x+y+z]$

$= [x+y+z][x^2 - xy - xz + y^2 + 2yz + z^2 - 3yz]$

$= [x+y+z][x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx]$

(4) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2)\ c(a^2 + b^2) + 2abc$

$= ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 2abc$

$= ba^2 + ca^2 + ab^2 + 2abc + ac^2 + bc^2 + cb^2$

$= a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + bc(b+c)$

$= (b+c)[a^2 + a(b+c) + bc]$

$= (b+c)[a^2 + ab + ac + bc]$

$= (b+c)[a(a+b) + c(a+b)]$

$= (b+c)(a+b)(c+a)$

$= (a+b)(b+c)(c+a)$

(5) $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 9abc$

$= a(b^2 - 2bc + c^2) + b(c^2 - 2ca + a^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) + 9abc$

$= ab^2 - 2abc + ac^2 + bc^2 - 2abc + ba^2 + ca^2 - 2abc + cb^2 + 9abc$

$= ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 3abc$

$= ab^2 + abc + ba^2 + bc^2 + abc + cb^2 + ac^2 + abc + ca^2$

$= ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ca(a+b+c)$

$= (a+b+c)(ab + bc + ca)$

(6) $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$

$= a(b^2 + 2bc + c^2) + b(c^2 + 2ca + a^2) + c(a^2 + 2ab + b^2) - 4abc$

$= ab^2 + 2abc + ac^2 + bc^2 + 2abc + ba^2 + ca^2 + 2abc + cb^2 - 4abc$

$= ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 6abc - 4abc$

$= ba^2 + ca^2 + ab^2 + 2abc + ac^2 + bc^2 + cb^2$

$= a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + bc(b+c)$

$= (b+c)[a^2 + a(b+c) + bc]$

$= (b+c)[a^2 + ab + ac + bc]$

$= (b+c)[a(a+b) + c(a+b)]$

$= (b+c)(a+b)(c+a)$

$= (a+b)(b+c)(c+a)$

(7) $3a^2(b-3c) + 3b^2(c-3a) + 3c^2(a-3b) + 26abc$

$= 3a^2b - 9a^2c + 3b^2c - 9b^2a + 3c^2a + 9c^2b + 26abc$

$= 3a^2b - 9a^2c - 9ab^2 + 26abc + 3ac^2 + 3b^2c - 9bc^2$

$= 3a^2(b-3c) - a(9b^2 - 26bc - 3c^2) + 3bc(b-3c)$

$= 3a^2(b-3c) - a(9b^2 - 27bc + bc - 3c^2) + 3bc(b-3c)$

$= 3a^2(b-3c) - a\{9b(b-3c) + c(b-3c)\} + 3bc(b-3c)$

$= 3a^2(b-3c) - a(b-3c)(9b + c) + 3bc(b-3c)$

$= (b-3c)\{3a^2 - a(9b+c) + 3bc\}$

$= (b-3c)\{3a^2 - 9ab - ac + 3bc\}$

$= (b-3c)\{3a(a-3b) - c(a-3b)\}$

$= (b-3c)\{(a-3b)(3a-c)\}$

$= -(b-3c)(a-3b)(c-3a)$

$= -(a-3b)(b-3c)(c-3a)$

(8) $\left(\frac{4x+3}{x-1} - \frac{3x^2-9x}{x^2-4x+3}\right) \times \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$ સાદુરૂપ આપો.

$= \left(\frac{4x+3}{x-1} - \frac{3x(x-3)}{(x-3)(x-1)}\right) \times \frac{(x-1)^2}{(x+3)(x-1)}$

$= \frac{4x+3-3x}{(x-1)} \times \frac{(x-1)2}{(x+3)(x-1)}$

$= \frac{(x+3)}{(x-1)} \times \frac{(x-1)^2}{(x+3)(x-1)}$

$= 1$

(9) $\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)} + \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} - \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$= \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} + \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(y+1)} - \frac{2(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2 - 2(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1-2x^2-2}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{0}{(x-1)(x+1)} = 0$

(10)

$$= \left[\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} - \frac{(x-y)^2+3xy}{(x^2-y^2)}\right] \div \frac{x+y}{x-y}$$

$$= \left[\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)} - \frac{(x^2+xy+y^2)}{(x-y)\,(x+y)}\right] \div \frac{x+y}{x-y}$$

$$= \left[\frac{x^2+2xy+y^2-x^2-xy-y^2}{(x-y)(x+y)}\right] \times \frac{x-y}{x+y}$$

$$= \frac{xy}{(x+y)^2}$$

(11)

$$\frac{x^3-8}{x^2+2x+4} \div \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} \times \frac{x}{x+2}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x^2+2x+4)}}{\cancel{(x^2+2x+4)}} \times \frac{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}} \times \frac{x}{\cancel{(x+2)}}$$

$$= x$$

(12)

$$\left[\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \times \frac{x^2-8}{x}\right]$$

$$= \left[\frac{x+2+x-2}{(x-2)(x+2)}\right] \times \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x}$$

$$= \frac{2\cancel{x}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} \times \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x}}$$

$$= \frac{2(x^2+2x+4)}{(x+2)}$$

(13)

$$\frac{x^3-8}{x^2-x} \times \frac{(x-1)^2+x}{(x+2)^2-2x} \div \frac{x^3+1}{x^3-x}$$

$$= \frac{x^3-8}{x^2-x} \times \frac{(x-1)^2+x}{(x+2)^2-2x} \times \frac{x^3-x}{x^3+1}$$

$$= \frac{(x-1)^2\,(x^2+2x+4)}{x\,(x-1)} \times \frac{x^2-2x+1+x}{x^2+4x+4-2x} \times \frac{x\,(x^2-1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(x-2)\,\cancel{(x^2+2x+4)}}{\cancel{(x(x-1)}} \times \frac{\cancel{x^2-x+1}}{\cancel{(x^2+2x+1)}} \times \frac{x\,\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2-x+1)}}$$

$$= (x-2)$$

પ્રશ્ન - ૧ (ક) અવયવ પાડો.

(1)

$(x^2-9)(y^2-25)-60xy$

$= x^2y^2-25x^2-9y^2+225-60xy$

$= x^2y^2-30xy+225-25x^2-30xy-9y^2$

$= (xy-15)^2-(25x^2+30xy+9y^2)$

$= (xy-15)^2-(5x+3y)^2$

$= (xy-15-5x-3y)(xy-15+5x+3y)$

(2)

$(x^2-3x)(x^2-3x-2)-8$

$x^2-3x = m$ લેતાં,

$\therefore m(m-2)-8$

$= m^2-2m-8$

$= (m-4)(m+2)$

$= (x^2-3x-4)(x^2-3x+2)$

$= (x-4)(x+1)(x^2-3x+2)$

(3) $(x^2-3x)^2-8(x^2-3x+8)-64$

$= m^2-8(m+8)-64$

$= m^2-8m-128$

$= (m-16)(m+8)$

$= (x^2-3x-16)(x^2-3x+8)$

(4) a^6-64b^6

$= (a^3)^2-(8b^3)^2$

$= (a^3-8b^3)(a^3+8b^3)$

$= (a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a+2b)(a^3-2ab+4b^2)$

(5) x^4-25x^2+144

$= x^4-16x^2-9x^2+144$

$= (x^2-16)(x^2-9)$

$= (x-4)(x+4)(x-3)(x+3)$

(6) $(a^2-1)(b^2-1)+4ab$

$= a^2b^2-a^2-b^2+1+4ab$

$= a^2b^2+2ab+1-a^2+2ab-b^2$

$= (a^2b^2+2ab+1)-(a^2-2ab+b^2)$

$= (ab+1)^2-(a-b)^2$

$= (ab+1-a+b)(ab+1+a-b)$

(7) $(x^2-4x)^2 - 25(x^2-4x) - 100$

$= (x^2 - 4x)^2 - 25x^2 + 100x - 100$

$= (x^2 - 4x)^2 - (25x^2 - 100x + 100)$

$= (x^2 - 4x)^2 - (5x-10)^2$

$= (x^2 - 4x - 5x + 10)(x^2 - 4x + 5x - 10)$

$= (x^2 - 9x + 10)(x^2 + x - 10)$

પ્રશ્ન - ૧ (ડ) માગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

(1) જો $\frac{3}{x} = \frac{4}{y} = z$ અને $x^2 + y^2 = 1$ હોય તો z શોધો.

$\frac{3}{x} = \frac{4}{y} = z = k$ ધારો,

$\therefore x = \frac{3}{k},\ y = \frac{4}{k},\ z = k$

$x^2 + y^2 = 1$ છે.

$\therefore \left(\frac{3}{k}\right)^2 + \left(\frac{4}{k}\right)^2 = 1$

$\therefore \frac{9}{k^2} + \frac{16}{k^2} = 1$

$\therefore \frac{9+16}{k^2} = 1$

$\therefore 25 = k^2$

$\therefore k = 5$

$\therefore z = 5$

(2) જો 6a = 3b = 2c હોય તો, $\frac{ab+bc}{a^2+ac}$ ની કિંમત શોધો.

6,3,2 નો લ.સા.અ. = 6

$\frac{6a}{6} = \frac{3b}{6} = \frac{2c}{6}$

$\therefore \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k$ ધારતાં,

$\therefore a = k,\ b = 2k,\ c = 3k$

$\therefore \frac{ab+bc}{a^2+ac} = \frac{(k)(2k)+(2k)(3k)}{(k)^2+(k)(3k)} = \frac{2k^2+6k^2}{k^2+3k^2} = \frac{8k^2}{4k^2} = 2$

(3) જો $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ હોય તો $\frac{2a-3b}{a-2b}$ ની કિંમત શોધો.

$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ $\quad\quad \therefore a = 2k, b = 3k$

$\therefore \frac{a}{2}=\frac{b}{3}= k$

$=\frac{2a\ -3b}{a-2b}$

$=\frac{2(2k)-3(3k)}{(2k)-2(3k)}$

$=\frac{4k\ -9k}{2k\ -6k}$

$=\frac{-5k}{-4k}$

$=\frac{5}{4}$

(4) $27x^3$ અને 3x નો ગુણોત્તર - મધ્યક શોધો.

$b^2 = ac$

$\therefore b^2 = 27x^2 \times 3x^2$

$\therefore b^2 = 81 \times x^4$

$\therefore b = 9x^2$

(5) $\frac{x^3-8}{x^2-2x+4} = \frac{x^3+-6}{(Px)}$ નું સાદુરૂપ આપો.

$\therefore \ (px) = \frac{(x^3+x-6)\ (x^3+2x+4)}{x^3-8}$

$= \frac{(x+3)\ \cancel{(x-2)}\ \cancel{(x^2+2x+4)}}{\cancel{(x-2)}\ \cancel{(x^2+2x+4)}}$

$= (x+3)$

(11) $\frac{x}{x-4} + \frac{4}{4-x}$ નું સાદુરૂપ આપો.

$=\frac{x}{x-4} - \frac{4}{x-4}$

$=\frac{x-4}{x-4}$

$=1$

(12) જો x = 1 તો 1 + 2x + 4x² - $\frac{8x^3}{2x-1}$ ની કિંમત શોધો.

$$= \frac{(2x-1)(1+2x+4x^2)-8x^3}{(2x-1)}$$

$$= \frac{8x^3 -1-8x^3}{2x-1}$$

$$= \frac{-1}{2x-1}$$, $x = 1$ લો.

$$= \frac{-1}{2(1)-1}$$

$$= \frac{-1}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

(13) 3a=2b અને 6b=5c હોય તો a:b:c. મેળવો.

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{m}{a^3+b^3}$$

$$\frac{(a-b)\ (a^2+ab+b^2)}{(a-b)\ (a+b)} = \frac{m}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\therefore m = (a^2+ab+b^2)\ \ (a^2-ab+b^2)$$

$$= (a^2+b^2)^2 - (ab)^2$$

$$= a^4+b^4+2a^2b^2 - a^2b^2$$

$$\therefore m = a^4 - a^2b^2 + b^4$$

$$\therefore m = a^4 - a^2b^2 + b^4$$

(14) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}$ નું સાદુરૂપ આપો.

$$= \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)\ (x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2-1}$$

$$= \frac{2x^2+2}{x^2-1}$$

$$= \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$$

પ્રશ્ન - ૧ (ઈ) કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ શોધી નીચેનાં વિધાનોમાં ખાલી જગ્યા પૂરો.

(1) વિધેય $f:N \to R$, $F(x) = x^{-1} + \frac{1}{(-1)^{-x}}$ હોય તો F(2) = ---------(0,-1,$^3/_2$) જવાબ : $^3/_2$

(2) વિધેય F: Z $\to$R, F (x) = x^2-2^x તો F(0) = -------- (0,1,**-1**) જવાબ : **-1**

(3) ગણ{x/4$\geq$ x >-4, x$\in$ R} ને અંતરાલ સ્વરૂપમાં ----- રીતે દર્શાવા. {**(-4,4)**, (4,-4) (-4,4) }1

જવાબ : **(-4, 4]**

(4) કમ્પ્યૂટરનાં બધા વિભાગોનું નિયંત્રણ ----- વિભાગ દ્વારા થાય છે. (IPD,**CPU,** OPD) જવાબ : **CPU**

(5) F: N $\to$R$^+$, F(x) = $\sqrt{x^2-9}$ હોય, તો F (6) = ---------(5,6,3$\sqrt{3}$) જવાબ : **3**$\sqrt{3}$

(6) ------------- $\notin$ (5,8] {6,8,**5**} જવાબ : **5**

(7) F: R$^+$$\to$ R , F(x)= $|x|$ નો આલેખ --------- છે. (**ખુલ્લુ કિરણ**, રેખા કિરણ) જવાબ : **ખુલ્લુ કિરણ**

(8) ફલોચાર્ટમાં લૂપની ઉપયોગથી ------ પ્રક્રિયા દર્શાવી શકાય છે. (સચિત્ર, **પુનરાવર્તિત,** ગાણિતીક)

જવાબ : **પુનરાવર્તિત**

(9) f: R$\to$R, F(x) = 3x+6 નો આલેખ -------- છે. (રેખાખંડ, કિરણ, **રેખા**) જવાબ : **રેખા**

(10) f: N$\to$R, F(x) = πx^2 હોય, તો F(7) =--------(7,**154**,49) જવાબ : **154**

(11) f: R$^+$$\to$ R f (x) = $\log_5$x માટે (125) = --------- (1,2,**3**) જવાબ : **3**

(12) કમ્પ્યૂટરમાં માહિતીના જથ્થાનો સંચય --------- માં થાય છે. (કન્ટ્રોલયુનિટ, મેમરી યુનિટ, **સેન્ટ્રલ પ્રોસેસિંગ યુનિટ**)

જવાબ : **સેન્ટ્રલ પ્રોસેસિંગ યુનિટ**

(13) F: Z$\to$ R, F(x) = 2x - 3 હોય તો ----------- એ તેના આલેખ પરનું બિંદુ નથી. {(-2.-7,).(-1.5),(0,2)}

જવાબ : (0,2)

(14) જટિલ પ્રશ્નના ઉકેલ મેળવવા અનુસરાતી તર્કબધ્ધ પગલાં અને સૂચનાઓની યોજનાને -------- કહે છે. (**ફલોચાર્ટ**, અલગોરિધમ, કમ્પ્યૂટર) જવાબ : **ફલોચાર્ટ**

(15) f: R$\to$ R અને f (x) = $|2x-1|$ નો આલેખ ----------- છે. (કિરણયુગ્મ, **ખુલ્લુ કિરણ**,કિરણ)

જવાબ : **ખુલ્લુ કિરણ**

(16) F: R $\to$R, f (x) = k નો આલેખ ------- છે. (x- અક્ષને લંબરેખા, બંને અક્ષને છેદતી રેખા, x અક્ષને સમાંતર રેખા) જવાબ : **x અક્ષને સમાંતર રેખા**

(17) કોમ્પ્યુટરની ગુણવત્તા તેની ----------- વિભાગની ક્ષમતા તથા ઝડપ પર આધારિત છે. (IPD, **CPU,** OPD)

જવાબ : **CPU**

(18) f: N$\to$Z, f(x) = $(x-2)^2$ તો f (x+2) = ------ (x^2+4x+4, $\mathbf{x^2}$, x^2-4x+4) જવાબ : $\mathbf{x^2}$

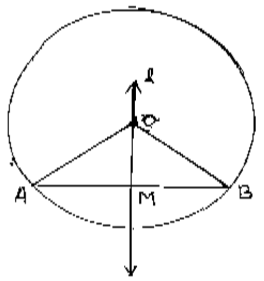
પ્રશ્ન -૨ (અ)

(1) સાબિત કરો કે "વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવાને દોરેલો લંબજીવાને દુભાગે છે."

જવાબ : પક્ષ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા $\overline{AB}$ છે. O માંથી $\overleftrightarrow{AB}$ ને લંબરેખા ℓ છે.

સાધ્ય : ℓ એ $\overline{AB}$ ને દુભાગે છે.

આકૃતિ :



સાબિતી : OA = OB = r (એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા)

$\therefore$ O એ બિંદુ A તથા બિંદુ B થી સમાન અંતર આવેલું બિંદુ છે.

$\therefore$ O એ $\overline{AB}$ ના લંબદ્વિભાજક પરનું બિંદુ છે.

આમ $O \in \overline{AB}$ હોય તો O એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ હોય જ.

આથી O માંથી $\overline{AB}$ ને લંબ $\overline{AB}$ ને દુભાગે છે.

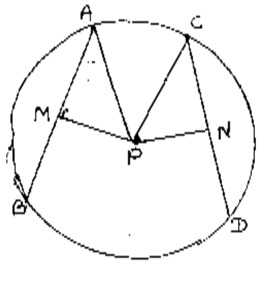
$O \notin \overline{AB}$ હોય તથા M એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ હોય તો M માંથી $\overline{AB}$ ને લંબરેખાએ $\overline{AB}$ નો અનન્ય લંબ દ્વિભાજક થાય, અને O લંબદ્વિભાજક પર હોવાથી $\overleftrightarrow{OM}$ એ $\overline{AB}$ ને લંબ થાય અને $\overline{AB}$ ને દુભાગે વળી. રેખાની બહારના બિંદુમાંથી રેખા પરની લંબરેખા અનન્ય હોય.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{OM}$ $(= \ell)$ એ $\overline{AB}$ ને દુભાગે છે.

(2) એકજ વર્તુળમાં કેન્દ્રથી સરખા અંતરે આવેલી જીવાઓ એકરૂપ હોય છે.

પક્ષ : P કેન્દ્રિત વર્તુળમાં $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ જીવાઓ છે. $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ અને $\overline{PN} \perp \overline{CD}$ તથા M અને N અનુક્રમે P માંથી $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ પરના લંબપાદ છે તથા $PM = PN$

સાધ્ય : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



સાબિતિ : $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ અને M લંબપાદ છે. (પક્ષ) તેથી M એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

તેથી M એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore \overline{AB} = 2AM$ ....(1)

$\overline{PM} \perp \overline{CD}$ અને N લંબપાદ છે. (પક્ષ)

તેથી N એ $\overline{CD}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore CD = 2CN$ ....(2)

હવે ΔAMP અને ΔCNP માં $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ (એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$\angle AMP$ અને $\angle CNP$ (કાટખૂણા)

$\overline{PM} \cong \overline{PN}$ (પક્ષ)

$\therefore$ સંગતતા AMP $\leftrightarrow$ CNP એકરૂપતા છે. (કા.ક.બા)

$\therefore$ $\overline{AM} \cong \overline{CN}$

$\therefore$ 2AM = 2CN................(3)

$\therefore$ AB = CD હોવાથી $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (પરિણામ (૧), (૨), (૩) ઉપરથી

પ્રશ્ન - 2 (બ) (ગમે તે બે ગણો)

(1) a+b=1 તથા c+d=1 છે. જો a-b = $\frac{d}{c}$ હોય, તો સાબિત કરો કે c-d = $\frac{b}{a}$

$$\frac{a-b}{1} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{d}{c}$$

યોગ વિયોગ લેતાં

$$\frac{a-\not{b}+a+\not{b}}{\not{a}-b-\not{a}-b} = \frac{d+c}{d-c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{d+c}{c-d}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c-d}{d+c}$$

(ઉલટ પ્રમાણ લેતાં)

$$\frac{b}{a} = c-d$$

(2) જો a:b = c:d હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{a3+b3+c3+d3}{a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}+d^{-3}}$ = $(ad)^3$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$$

$$a=bk,\ \ c=dk$$

$$\text{ડા.બા.}=\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}+d^{-3}}$$

$$=\frac{b^3k^3+b^3+d^3k^3+d^3}{b^{-3}k^{-3}+b^{-3}+d^{-3}k^{-3}+d^{-3}}$$

$$=\frac{b^3(k^3+1)+d^3(k^3+1)}{b^{-3}(k^{-3}+1)+d^{-3}(k^{-3}+1)}$$

$$=\frac{(k^3+1)\ (b^3+d^3)}{(k^{-3}+1)\ (b^{-3}+d^{-3})}$$

$$=\frac{(k^3+1)\ (b^3+d^3)}{(1/k^3+1)\ (1/b^3+1/d^3)}$$

$$=\frac{b^3k^3d^3\ (k^3+1)\ (b^3+d^3)}{(1+k^3)+(b^3+d^3)}$$

$$=(bkd)^3$$

$$=(ad)^3$$

= જ.બા.

∴ ડા.બા. = જ.બા.

(3) જો $\frac{5b+6c}{4a}=\frac{6c+4a}{5b}=\frac{4a-5b}{6c}$ તો દરેક ગુણોત્તરની કિંમક શોધો.

$\frac{5b+6c}{4a}=\frac{6c+4a}{5b}=\frac{4a+5b}{6c}$ તો દ.ગુ.ની કિંમત શોધો.

$$\therefore \text{દ.ગુ.}=\frac{5b+6c+6c+4a+4a+5b}{4a+5b+6c},\quad (4a+5b+6c\neq 0)$$

$$=\frac{2(4a+5b+6c)}{(4a+5b+6c)}$$

$$=2.$$

હવે $4a+5b+6c=0$ હોય તો

$$5b+6c=-4a$$

$$\text{પ્ર.ગુ.} = \frac{5b+6c}{4a} \qquad \text{બી.ગુ.} = \frac{6c+4a}{5b}$$

$$= \frac{-4a}{4a} \qquad = \frac{-5b}{5b}$$

$\therefore$ દ.ગુ. $= -1$ $\qquad$ $\therefore$ દ.ગુ. $= -1$

$\therefore$ દ.ગુ. $= -1$

(4) સાબિત કરો કે $\frac{ab+c2}{a-b+c}$ = b+c તો b એ a અને c નો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

$\frac{ab+c^2}{a-b+c} = b+c$ તો સા. કરો કે b એ a અને c નો ગુ.મ.છે.

$ab+c^2 = (b+c)\,(a-b+c)$

$\cancel{ab} + \cancel{c}^2 = \cancel{ab} - b^2 + \cancel{bc} + ac - \cancel{bc} + \cancel{c}^2$

$0 = -b^2 + ac$

$b^2 = ac$

$\therefore b$ એ a અને c નો ગુ.મ.છે.

(5) $\frac{a+b+a}{c+d+a} = \frac{a-c}{2d}$ તો સાબિત કરો કે $\frac{b}{a-c} = \frac{a+c-d}{2d}$.

દ.ગુ. $= \frac{a+b-c-a+c}{c+d+a-2d}$

$= \frac{b}{c-d+a}$

હવે $\frac{b}{c-d+a} = \frac{a-c}{2d}$

એકાંતર પ્રમાણ લેતાં

$\frac{b}{a-c} = \frac{c-d+a}{2d}$

(6) એક યાંત્રિક હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ 15 કિ.મી. /કલાક છે. આ હોડીને એક નદીના પ્રવાહની દિશામાં 60 કિ.મી. નું અંતર અને પ્રવાહની દિશામાં એટલા જ કિ.મી. અંતર કાપતાં કુલ 9 કલાકનો સમય લાગે છે. તો નદીના પ્રવાહની ઝડપ શોધો. નદીના પ્રવાહની ઝડપ હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ કરતાં ઓછી છે.

ધારો કે નદીના પ્રવાહની ઝડપ x છે.

નદીના પ્રવાહની દિશામાં હોડીની ઝડપ = (15 + x)

નદીના પ્રવાહની વિરૂદ્ધ દિશામાં હોડીની ઝડપ = (15 - x)

60 કિ.મી. અંતર પ્રવાહની દીશામાં કાપતાં લાગતો

સમય $= \frac{60}{15+x}$ કલાક

60 કિ.મી. અંતર પ્રવાહની વિરૂદ્ધ દીશામાં કાપતાં લાગતો

સમય $= \frac{60}{15-x}$ કલાક $\qquad$ $\therefore$ કુલ સમય 9 કલાક લાગે છે.

$\therefore \; \frac{60}{15+x} + \frac{60}{15-x} = 9$

$\therefore \; 60(15-x) + 60(15+x) = 9(15-x)(15+x)$

$\therefore \; 900-60x+900-60x = 9(225-x^2)$

$\therefore \; \frac{1800}{9} = (225-x^2)$

$\therefore \; 200 = 225-x^2$

$\therefore \; x^2 = 225-200$

$\therefore \; x^2 = 25$

$\therefore \; x = \pm 5$

$\therefore \; x = 5$ કિ.મી/કલાક

નદીના પ્રવાહની ઝડપ $x = 5$ કિ.મી/કલાક

પ્રશ્ન : 2 (ક) નીચે આપેલા પ્રશ્નો પૈકી ગમે તે બે નાં જવાબ આપો.

(1) એક વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક 15.4 અને મધ્યસ્થ 16.2 છે. તો તે પરથી બહુલક શોધો.

$\bar{x} = 15.4$ અને $M = 16.2$

$\therefore \; Z = 3M - 2\bar{x}$

$\therefore \quad = 3(16.2) - 2(15.4)$

$\therefore \quad = 48.6 - 30.8$

$\therefore \; Z = 17.8$

(2) 6 કુટુંબોનાં બાળકોની સંખ્યા 0,2,1,4,3 અને x છે. જો માહિતીનો મધ્યક 2 હોય તો x ની કિંમત શોધો.

$n = 6$

$\therefore \; \sum xi = 0+2+1+4+3+x$

$\therefore \; \sum xi = 10+x$

હવે $\bar{x} = \frac{\sum xi}{n}$

$\therefore \; 2 = \frac{10+x}{6}$

$\therefore \; 12 = 10+x$

$\therefore \; x = 12-10$

$\therefore \; x = 2$

(3) 10 અવલોકનોનો મધ્યક 12.5 છે તેમાં ભૂલથી એક અવલોકન (-8) ને બદલે (+8) લેવાઈ ગયું છે. તો માહિતીનો સાચો મધ્યક શોધો.

10 અવલોકનોનો મધ્યક 12.5 છે.

ભૂલથી એક અવલોકન (-8) ને બદલે (+8) લેવાઈ ગયું છે.

$\therefore$ સાચો સરવાળો $= n \times \bar{x} -$ ખોટું અવલોકન $+$ સાચું અવલોકન

$= 10 \times 12.5 - 8 + (-8)$

$= 125 - 8 - 8$

$= 125 - 16$

$= 109$

$\therefore$ સાચો મધ્યક $= \dfrac{\sum xi}{n}$

$= \dfrac{109}{10}$

$\therefore \bar{x} = 10.9$

(3) એક વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક અને મધ્યસ્થ અનુક્રમે 72-5 અને 73-9 છે, તો બહુલક શોધો.

$\bar{x}$ = 72-5

M = 73.9

Z = 3M - 2$\bar{x}$

$\therefore$ = 3 (73.9) - 2(72.5)

$\therefore$ = 221.7 - 145.0

$\therefore$ Z= 76.7

(4) એક વર્ગીકૃત માહિતી માટે M-X= Z અને Z = 20.5 હોય તો મધ્યસ્થ શોધો.

$M - \bar{x} = 2$	
$Z = 3M = 2\bar{x}$	$Z = 20.5$
$20.5 = 3M - 2(M-2)$	$M - \bar{x} = 2$
$20.5 = 3M - 2M + 4$	$\therefore M = 2 + \bar{x}$
$20.5 - 4 = M$	$M - 2 = \bar{x}$
$16.5 = M$	

પ્રશ્ન - 2 (ડ)

(1) f : z $\rightarrow$ z, f (n) = $(-1)^n$. n માટે f (-4) + f (3) ની કિંમત શોધો.

f (n) = $(-1)^n$.n

$\rightarrow$ f (-4) = $(-1)^4$ x (-4) $\rightarrow$ f (-3) = $(-1)^3$ x (3)

= 1x (-4) = (-1) x (3)

= -4 = -3

$\therefore$ f (-4) + f (3) = -4 -3

= -7

(2) A = {1, 3, 5, 7} તથા f : A $\rightarrow$ NU {0}, f (x1 = $(-1)^x$.x + x નો વિસ્તાર શોધો.

f (x) = $(-1)^x$. x+x

$\therefore$ f (1) = $(-1)^1$. 1+1 = (-1) +1 = 0

$\therefore$ f (3) = $(-1)^3$. 3+3 = -3 +3 = 0

$\therefore$ f (5) = $(-1)^5$. 5+5 = -5 +5 = 0

$\therefore$ f (7) = $(-1)^7$. 7+7 = -7 +7 = 0

$\therefore$ વિસ્તાર = {0}

(3) વિધેય $f : R \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+9}$ માટે f (0) શોધો.

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+9}$$

$$\therefore f(0) = \frac{0^2-9}{0^2+9}$$

$$\therefore \quad = \frac{-9}{9}$$

$$\therefore f(0) = -1$$

(4) જો A = {3^n/ n $\in$ N}, B=N, f:A $\rightarrow$ B માટે $\log_3 x$ તો f : નો વિસ્તાર શોધો.

A= {3^n/ n $\in$ N} માં n=1,2,3,4.........મૂકતાં

$\therefore$ A= {3^1, 3^2, 3^3, 3^4,...}

હવે f (x) = $\log_3$ x

$\therefore$ f (3^1) = $\log_3 3^1$ =1

$\therefore$ f (3^2) = $\log_3 3^2$ =2

$\therefore$ f (3^3) = $\log_3 3^3$ =3

$\therefore$ f (3^4) = $\log_3 3^4$ =4

$\therefore$ વિધેયનો વિસ્તાર : R_f = {1,2,3,4,..........}

(5) f: N $\rightarrow$ N, f(x)= 3x+1 હોય તો f નો વિસ્તાર શોધો.

$\therefore$ f (x) = 3x + 1

$\therefore$ f (1) = 3(1) + 1 = 3+1 = 4

$\therefore$ f (2) = 3(2) + 1 = 6+1 = 7

$\therefore$ f (3) = 3(3) + 1 = 9+1 = 10

$\therefore$ f (4) = 3(4) + 1 = 12+1 = 13

આમ, વિધેયનો વિસ્તાર : R_f = {4,7,10,13,...}

પ્રશ્ન : ૨ (ઈ) યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

(1) જો 4a= 5b-12c હોય, તો a : b: c = -------. (4:5:12, 12:5:4, 15:12:5) **Ans. : (15:12: 5)**

(2) જો $\sin\theta = \cos\theta$ હોય, તો θ = -----. (0°,45°,90°) **Ans. : 45°**

(3) a અને 4 નો ગુણોત્તર મધ્યક 6 હોય, તો a = --------- (10,9,$^3/_2$) **Ans. : 9**

(4) $\frac{2}{3x} + \frac{1}{3x} = ------.(3, n, \frac{1}{x})$ **Ans. : $\frac{1}{x}$**

(5) જો x = 4 હોય, તો $9x^2-3x + 1 - \frac{27x^3}{3x+1} =$ --------. **Ans. :** $\frac{1}{13}$

(6) જો 5 $\cos\theta$ = 3 તો $\tan\theta$ = ------. $(\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{4}{3})$ **Ans. :** $\frac{4}{3}$

(7) $\operatorname{cosec}30^\circ = \sec\theta$ તો θ = ---------. $(30^\circ,60^\circ,90^\circ)$ **Ans. :** 60^0

(8) $x\alpha\sqrt{y}$ અને $y\alpha\sqrt{z}$ હોય તો $x\alpha$ ------. $(\sqrt[4]{z},\sqrt{z},z)$ **Ans. :** $\sqrt[4]{z}$

(9) જો $4x^2y^2 + 1 = 4xy$ તો $x\alpha$ ------. $(\sqrt{y},\frac{1}{y},y^2)$. **Ans. :** $\frac{1}{y}$

(10) $(a+1)^2$ અને $(a-1)^2$ નો ગુણોત્તર મધ્યક---------- છે. $\{(a^2-1)^2, a^2+1, a^2-1\}$ **Ans. :** a^2-1

(11) જો $x+\frac{1}{x}=2$ તો $x^3-\frac{1}{x^3}$ = -------.(0,1,2) **Ans. :** 0

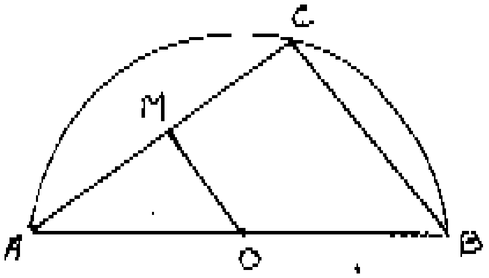
પ્રશ્ન - 3 (અ)

(1) સાબિત કરો કે, અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં $\overset{\frown}{AB}$ અર્ધવર્તુળ અને $\angle ACB$ તેમાં અંતર્ગત ખૂણો છે.

સાધ્ય : $m\angle ACB = 90^\circ$

આકૃતિ :



સાબિતી : $\overset{\frown}{AB}$ અર્ધવર્તુળ છે. આથી તેને અનુરૂપ $\overline{AB}$ વ્યાસ છે. આમ O એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ છે. M એ $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ હોય તો $\overline{OM}$ એ કેન્દ્ર અને જીવાના મધ્યબિંદુને જોડતો રેખાખંડ થાય.

$\therefore \overline{OM} \perp \overline{AC}$ આથી $m\angle AMO = 90^0$...........(1)

ΔABC માં $\overline{AC}$ અને $\overline{AB}$ નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે M તથા O છે.

$\therefore \overline{OM} \parallel \overline{CB}$ તથા તેની છેદિકા $\overleftrightarrow{AC}$ થી બનતા અનુકોણો

$\angle AMO \cong \angle ACB$ થાય.

પરંતુ $m\angle AMO \cong 90^0$

$\therefore m\angle ACB = 90^0$ ▮

પ્રશ્ન - 3 (બ) નીચેના દાખલા ગણો.

(1) એક ધાતુના ગોળાનો વ્યાસ 20 cm છે. તેને ઓગાળી તેમાંથી 0.5સેમી. ત્રિજયાવાળી કેટલી ગોળીઓ બનાવી શકાય ?

ધાતુના નકકર ગોળાનું ઘનફળ = 1 ગોળીનું ઘનફળ x ગોળીની સંખ્યા

$\therefore \frac{4}{3} \pi r_1^3 = \frac{4}{3} \pi r_2^3 \times n$

$\therefore \frac{4}{3} \pi (10)^3 = \frac{4}{3} \pi (\frac{5}{10})^3 \times n$ (જ્યાં $r_1 = 10$ સે.મી.)

$r_2 = 0.5$ સે.મી.)

$\therefore n = 10 \times 10 \times 10 \times \frac{10}{5} \times \frac{10}{5} \times \frac{10}{5}$

$= 8000$ ગોળીઓ.

જવાબ: $= 8000$ ગોળીઓ બને.

(2) એક ધાતુના ગોળાનો વ્યાસ 3 સેમી છે. તેને ઓગાળીને 2 મિલીમીટર વ્યાસનો તાર બનાવવામાં આવે તો તારની લંબાઈ કેટલી થાય ?

ગોળાનો વ્યાસ = 3 સે.મી.

$\therefore$ ગોળાની ત્રિજ્યા = $\frac{3}{2}$ સે.મી.

હવે, ગોળાનું ઘનફળ = $\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$= \frac{9}{2} \pi$ ઘન સે.મી.

નળાકાર તારની લંબાઈ એ તેની ઉંચાઈ છે. તારની લંબાઈ h સે.મી. છે.

તારની ત્રિજ્યા = $\frac{2}{2}$ મિ.મી. = 1 મિ.મી. = $\frac{1}{10}$ સે.મી.

તારનું ઘનફળ = ગોળાનું ઘનફળ

$\therefore \pi r^2 h = \frac{9}{2} \pi$

$\therefore h = \frac{9 \times 10 \times 10}{2}$

$\therefore h = 450$ સે.મી. $\therefore$ તારની લંબાઈ = 450 સે.મી.

(3) મિનારાની ટોચ આગળના ઉત્સેધકોણો એક બીજાના કોટિકોણ હોય તો મિનારાની ઊંચાઈ $\sqrt{ab}$ છે. એમ બતાવો.

$\overline{AB}$ મિનારો છે. A મિનારાની ટોચ છે. B મિનારાનો પાયો છે. C અને D જમીન પરનાં બિંદુઓ છે.

BC = a અને BD=b મિનારાની ઉંચાઈ = ?

$\angle$ACB અને $\angle$ADB કોટિકોણ છે.

જો m $\angle$ACB=θ તો m $\angle$ADB= (90 -θ)

ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \quad \tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{h}{a}$ ....(1)

Δ ABD કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \quad \tan(90-\theta) = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{h}{b}$ ....(2)

$\tan\theta \times \tan(90-\theta) = \dfrac{h}{a} \times \dfrac{h}{b}$ [પરિણામ (૧),(૨) પરથી]

$\therefore \quad \tan\theta \times \cot\theta = \dfrac{h^2}{ab}$

$1 = \dfrac{h^2}{ab}$

$\therefore h^2 = ab$

$\therefore h = \sqrt{ab}$

$\therefore$ મિનારાની ઊંચાઈ $= \sqrt{ab}$ થાય.

(4) એક શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 30 સેમી. અને 70 cm છે. તો એ શંકુનું ઘનફળ શોધો.

શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા r = 30 સે.મી.

ઊંચાઈ h = 70 સે.મી.

શંકુનું ઘનફળ $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 30 \times 30 \times 70$

$= 66,000.$

$\therefore$ શંકુનું ઘનફળ = 66000 ઘન સે.મી.

(5) એક તોપના ગોળાનું ઘનફળ 4851 ઘન સેમી. છે. તો તેનો વ્યાસ શોધો.

ધારો કે ગોળાનું ઘનફળ = V

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$4851 = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{22}{7} \times r^3$

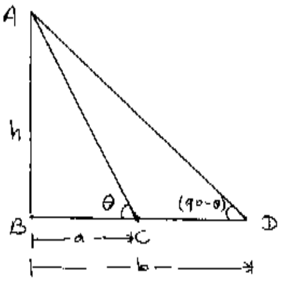
$\dfrac{4851 \times 3 \times 7}{4 \times 22} = r^3$

$\therefore r = \dfrac{21}{2}$

$\therefore$ વ્યાસ $= \dfrac{21}{2} \times 2 =$ 21 સે.મી.

(6) એક બહુમાળી મકાન પર h મીટર લાંબો એક સ્તંભ છે. જો સ્તંભની ટોચ અને તળિયાના જમીન પર એક બિંદુ આગળના ઉત્સેધકોણો અનુક્રમે α અને B હોય તો બહુમાળી મકાનની ઊંચાઈ $\frac{h\,tan\,\beta}{tan\alpha - tan\,\beta}$ મીટર સાબિત કરો.

ΔBCDમાં



$$\tan\beta = \frac{BC}{CD} = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{x}{\tan\beta}\,.........(1)$$

હવે, ΔACDમાં

$$\tan\alpha = \frac{AC}{CD}$$

$$= \frac{h+x}{y}$$

$$\therefore\ y = \frac{h+x}{\tan\alpha}\,........(2)$$

(1) અને (2) પરથી ,

$$\frac{x}{\tan\beta} = \frac{h+x}{\tan\alpha}$$

$$\therefore\ x\tan\alpha = (x+h)\tan\beta$$

$$\therefore\ x\tan\alpha = x\tan\beta + h\tan\beta$$

$$\therefore\ x\tan\alpha - x\tan\beta = h\tan\beta$$

$$\therefore\ x(\tan\alpha - \tan\beta) = h\tan\beta$$

$$\therefore\ x = \frac{h\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$$

$\therefore$ બહુમાળી મકાનની ઊંચાઈ $\frac{h\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$ છે.

પ્રશ્ન - 3 (ક) નીચે આપેલા દાખલા ગણો.

(1) જો $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$ હોય તો સાબિત કરો કે $(3\cos\theta - 5\sin\theta)^2 = 9$

$3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$

$(3\sin\theta + 5\cos\theta)^2 = 5^2$ (બંને બાજુએ વર્ગ લેતાં)

$\therefore 9\sin^2\theta + 30\sin\theta\cos\theta + 25\cos^2\theta = 25$

$\therefore 9(1-\cos\theta^2) + 30\sin\theta\cos\theta + 25(1-\sin^2\theta) = 25$

$\therefore [\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ અને $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta]$

$\therefore 9 - 9\cos^2\theta + 30\sin\theta\cos\theta + 25 - 25\sin^2\theta = 25$

$\therefore -9\cos^2\theta + 30\sin\theta\cos\theta - 25\sin^2\theta = \cancel{25} - \cancel{25} - 9$

$\therefore -9\cos^2\theta + 30\sin\theta\cos\theta - 25\sin^2\theta = -9$

$\therefore 9\cos^2\theta - 30\sin\theta\cos\theta + 25\sin^2\theta = 9$

$\therefore (3\cos\theta - 5\sin\theta)^2 = 9$

(2) સાબિત કરો કે : $= \frac{1}{2-sin^2\beta} + \frac{1}{2+tan^2\beta} = 1$

ડા.બા.= $\frac{1}{2-sin^2\beta} + \frac{1}{2+tan^2\beta}$

$= \frac{1}{1+1-sin^2\beta} + \frac{1}{1+1+tan^2\beta}$

$= \frac{1}{1+cos^2\beta} + \frac{1}{1+sec^2\beta}$

$= \frac{1}{1+cos^2\beta} + \frac{1}{1+\frac{1}{cos^2\beta}}$

$= \frac{1}{1+cos^2\beta} + \frac{1}{\frac{cos^2\beta+1}{cos^2\beta}}$

$= \frac{1}{1+cos^2\beta} + \frac{cos^2\beta}{1+cos^2\beta}$

$= \frac{1+cos^2\beta}{1+cos^2\beta}$

$= 1$

$=$ જ.બા

(3) સાબિત કરો કે : $\sin\alpha(1+\tan\alpha)+\cos\alpha(1+\cot\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha+\sec\alpha$.

ડા.બા. $= \sin\alpha\,(1+\tan\alpha)+\cos\alpha(1+\cot\alpha)$

$$= \sin\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+\cos\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$= \sin\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \sin\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha} \qquad [\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1]$$

$$= \operatorname{cosec}\alpha+\sec\alpha$$

= જ.બા.

(4) સાબિત કરો કે $(\sec\theta.\cot\theta)^2-(\cos\theta.\operatorname{cosec}\theta)^2=1$

ડા.બા. $= (\sec\theta.\cot\theta)^2-(\cos\theta.\operatorname{cosec}\theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= \operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta$$

$$= 1$$

= જ.બા.

(5) સાબિત કરો કે $\dfrac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta}=\operatorname{cosec}\theta$.

ડા.બા. $= \dfrac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta}$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cancel{\cos\theta}\,(1)}{\sin\theta\,\cancel{\cos\theta}} = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta = \text{જ.બા.}$$

પ્રશ્ન - 3 (ડ) નીચેના દાખલા ગણો.

(1) જો $\sec\theta = \sqrt{2}$ (જ્યાં θ = લઘુકોણ) તો $\tan\theta + \cot\theta$ ની કિંમત મેળવો.

$\therefore \sec\theta = \sqrt{2}$

$\therefore \sec^2\theta = 2$

$\therefore 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1+\tan^2\theta = 2$

$\therefore \tan^2\theta = 2-1 = 1$

$\therefore \tan\theta = 1$

$\therefore \cot\theta = 1$

હવે, $\tan\theta + \cot\theta$

$= 1+1$

$= 2$

(2) $\cos\theta = {}^4/_5$ તો $\sin\theta$ મૂલ્ય શોધો.

$\cos\theta = \frac{4}{5}$

$\therefore \cos^2\theta = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\therefore \cos^2\theta = \frac{16}{25}$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= \sqrt{1-\frac{16}{25}}$

$= \sqrt{\frac{25-16}{25}}$

$= \sqrt{\frac{9}{25}}$

$\therefore \sin\theta = \frac{3}{5}$

(3) લઘુકોણ θ માટે $\sin\theta = m$ હોય તો $\tan\theta + \cot\theta$ શોધો.

$\sin\theta = m$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \sqrt{1-m^2}$

$\tan\theta + \cot\theta$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} + \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

$= \frac{m^2+1-m^2}{m\sqrt{1-m^2}}$

$= \frac{1}{m\sqrt{1-m^2}}$

(4) $x+\frac{1}{y}\alpha\, x-\frac{1}{y}$ તો સાબિત કરો કે $x\alpha\frac{1}{y}(x\neq 0, y\neq 0)$

$x+\frac{1}{y}\;\alpha\;\; x-\frac{1}{y}$

$\therefore\;\; x+\frac{1}{y} = k\left(x-\frac{1}{y}\right)$, જ્યાં $(k\neq o)$

$\therefore\; \frac{xy+1}{y} = k\,\frac{(xy-1)}{y}$

$\therefore\; \frac{y(xy+1)}{y(xy-1)} = k$

$\therefore\; \frac{xy+1}{xy-1} = k$

$\therefore\; \frac{xy+1+xy-1}{xy+1-xy+1} = \frac{k+1}{k-1}$ (યોગ - વિયોગ)

$\therefore\; \frac{2xy}{2} = m$ જ્યાં $\frac{k+1}{k-1} = m$ $\qquad k\neq\pm 1$

$\therefore\; xy = m$

$\therefore\; x\alpha\frac{1}{y}$

(5) જો $a^2\alpha\, bc$, $b^2\alpha\, ca$ હોય તો સાબિત કરો કે $c^2\alpha\, ab$ $(a\neq 0,\, b\neq 0)$.

અહીં,

$a^2\alpha\; bc,\qquad \therefore a^2 = kbc\;(k\neq o)$

$b^2\alpha\; ca\qquad \therefore b^2 = mac\;(m\neq o)$

ગુણાકાર લેતા,

$a^2b^2 = (kbc)\,(mac)$

$= kmabc^2$

$\therefore\quad \frac{a^2b^2}{ab} = \frac{km\not{ab}c^2}{\not{ab}}$

$\therefore\quad ab = kmc^2$

$\therefore\quad ab\;\alpha\; c^2$

$\therefore\quad c^2\,\alpha\, ab.$

(6) સાબિત કરો કે, $\sin\theta\;\cos(90-\theta) + \cos\theta\;\sin(90-\theta) = 1.$

ડા.બા. $= \sin\theta\cos(90-\theta) + \cos\theta\sin(90-\theta)$

$= \sin\theta.\sin\theta + \cos\theta.\cos\theta$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= 1$

= જ.બા.

પ્રશ્ન - 3 (ઈ) નીચેના પ્રશ્નોનાં માંગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

(૧) જે દ્વિઘાત સમી. નાં બીજ $\frac{-1}{2}$ અને $\frac{2}{5}$ છે તા તે સમીકરણ શોધો . Ans. : $10x^2 + x - 2=0$

(૨) x^2 - mx -8 = O નું એક બીજ 4 હોયતો m શોધો Ans. : m = 2

(૩) દ્વિઘાત સમી. $x^2+3x+k=o$ નું એક બીજ -1 હોયતો બીજુ બીજ મેળવો. Ans. : - 2

વ્યાખ્યા આપો.

(૪) **ત્રિકોણ ની સમરૂપતા :** બે ત્રિકોણોની કોઈ સંગતતા માટે જો અનુરૂપ ખૂણાઓ એકરૂપ હોય અને અનુરૂપ બાજુઓના માપ સમપ્રમાણમાં હોય તો તે સંગતતા સમરૂપતા કહેવાય.

(૫) **રેખાઓની છેદિકા :** જો ભિન્ન સમતલીય રેખાઓ ℓ_1 અને ℓ_2 ને કોઈ રેખા t બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને B માં છેદે તો રેખા t ને રેખાઓ ℓ_1 અને ℓ_2 ની છેદિકા કહેવાય.

(૬) **ત્રિકોણની મધ્યગા :** જે રેખાખંડનાં અંત્યબિંદુઓ એ ત્રિકોણનું કોઈ શિરોબિંદુ અને તેની સામેની બાજુનું મધ્યબિંદુ હોય તો તે રેખાખંડ ને ત્રિકોણની મધ્યગા કહે છે.

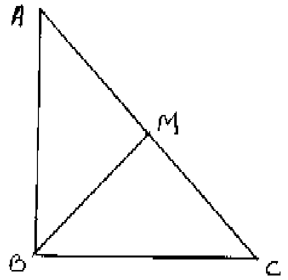
પ્રશ્ન - 4 (અ) માંગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

(૧) ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે તથા $\overline{BM}$ એ વેધ છે તો સાબિત કરોકે $\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}$

પક્ષ : ΔABC માં $\angle B$ કોટખૂણો છે તથા $\overline{BM}$ એ કર્ણ $\overline{AC}$ પરનો વેધ છે

સાધ્ય : $\frac{1}{BM^2} = \frac{1}{AB^2} + = \frac{1}{BC^2}$

આકૃતિ :



સાબિતી : ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. અને $\overline{BM}$ એ કર્ણ $\overline{AC}$ પરનો વેધ છે તેથી A-M-C થાય.

$\therefore\ AM + CM = AC$.............(1)

BM એ AM અને CM નો ગુણોત્તર મધ્યક હોવાથી

$BM^2 = AM \times CM$.............(2)

તેવી રીતે $AB^2 = AM \times AC, BC^2 = CM \times AC$ (પ્રમેય 9).............(3)

પરિણામ (1) (2) અને (3) પરથી

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{AM \times AC} + \frac{1}{CM \times AC}$$

$$= \frac{1}{AC}\left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{CM}\right)$$

$$= \frac{1}{AC} \times \left(\frac{AM + CM)}{AM \times CM}\right)$$

$$= \frac{1}{AC} \times \frac{AC}{AM \times CM}$$

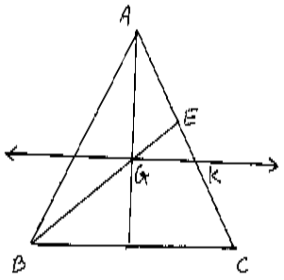
$$= \frac{1}{AM \times CM} = \frac{1}{BM^2}$$

(૨) ΔABC ની મધ્યગા $\overline{AD}$ અને $\overline{BE}$ એકબીજાને G માં છેદે છે G માંથી $\overline{BD}$ ને સમાંતર દોરેલી રેખા $\overline{AC}$ ને K બિંદુ માં છેદે છે સાબિત કરો કે $AC = 6EK$

પક્ષ : ΔABC ની મધ્યગા $\overline{AD}$ અને $\overline{BE}$ એકબીજાને G માં છેદે છે G માંથી $\overline{BD}$ ને સમાંતર દોરેલી રેખા $\overline{AC}$ ને K બિંદુ માં છેદે છે.

સાધ્ય : AC = 6 EK

આકૃતિ :



સાબિતી : ΔABC માં $\overline{BE}$ મધ્યગા છે (પક્ષ)

$\therefore AC = 2CE$............(1)

ΔABC માં $\overline{AD}$ અને $\overline{BE}$ મધ્યગાઓ G માં છેદે છે.

$\therefore \frac{GE}{BE} = \frac{1}{3}$ ....(2)

ΔEBC માં $\overline{GK} \parallel \overline{BC}$ $(\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{BC})$

$\therefore \frac{GE}{BE} = \frac{EK}{CE}$ (પ્રમેય -1) ....(3)

પરિણામ (2) અને (3) પરથી

$\frac{1}{3} = \frac{EK}{CE}$

$\therefore CE = 3EK$ પરિણામ (1) માં મુકતાં

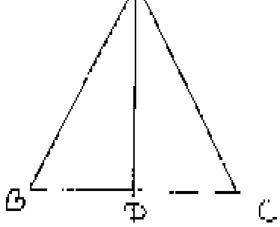
$$AC = 2CE$$
$$= 2(3EK)$$
$$= 6\ EK$$

(૩) ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો અને $\overline{AD}$ મધ્યગા છે. તો સાબિત કરોકે $AC^2 = AD^2 + 3CD^2$

પક્ષ : ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો અને $\overline{AD}$ મધ્યગા છે.

સાધ્ય : $AC^2 = AD^2 + 3CD^2$

આકૃતિ :



સાબિતી : ΔABC માં $\overline{AD}$ મધ્યગા છે. (પક્ષ)

$\therefore D$ એ $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore BC = 2CD$ અને $B - D - C$

ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે તેથી

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (પ્રમેય ૧૦ પ્રમાણે)

$= AB^2 + (2CD)^2$

$= AB^2 + 4CD^2$

$= AB^2 + CD^2 + 3CD^2 \quad (CD = BD)$

$= AB^2 + BD^2 + 3CD^2$ ....(1)

ΔABD માં $\angle B$ કાટકોણ છે તેથી $AB^2 + BD^2 = AD^2$ ....(2)

પરિણામ (2) ને એકમાં (1) મૂકતાં

$AC^2 = AD^2 + 3CD^2$

પ્રશ્ન - 4 (બ) નીચે આપેલ દાખલા ગણો.

(1) આપેલી માહિતી પર થી મધ્યસ્થ શોધો.

વજન	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
કિ.ગ્રામ	f	F
60-64	13	13
65-69	28	41
70-74	35	76
75-79	12	88
80-84	9	97
85-89	3	100
કુલ	100	

ધારેલો મધ્યસ્થ $= \frac{n}{2}$ માં અવલોકનની કિંમત

$= \frac{100}{50}$ માં અવલોકનની કિંમત

$= 50$ માં અવલોકનની કિંમત

<u>મધ્યસ્થ વર્ગ</u> 70 -74

L = 69.5 C=5

f = 35 n=100

F = 41

$$M = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f} \right) \times c$$

$$= 69.5 + \left(\frac{50 - 41}{35} \right) \times 5$$

$$= 69.5 + \frac{9}{7}$$

$$= 69.5 + 1.29$$

$= 70.79$ કિ.ગ્રામ

(2) 70 વિદ્યાર્થી ઓએ એક કસોટી માં મેળવેલા ગુણ નું આવૃતિ વિતરણ નીચે મુજબ છે જે પરથી માહિતી નો મધ્યક શોધો

ગુણ	0	1	2	3	4-6	7-9	10-14	15-19	20-24	25-32
આવૃત્તિ	5	3	3	2	5	15	20	10	6	1

ગુણ	આવૃત્તિ-fi	મધ્યકિંમત-xi	fixi
0	5	0	0
1	3	1	3
2	3	2	6
3	2	3	6
4-6	5	5	25
7-9	15	8	120
10-14	20	12	240
15-19	10	17	170
20-24	6	22	132
25-35	1	30	30
	n=70		$\sum$ fixi = 732

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{n}$$

$$= \frac{732}{70}$$

$= 10.46$ ગુણ

(3) $\left(\frac{x^3 - 64}{15x^2 - x - 2} X \frac{33x^2 + 8x - 1}{7x^2 + 28x + 112} \right)_0^0 \frac{11x^2 - 45x + 4}{5x^2 + 3x - 2}$

$$= \left[\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(3x+1)\,(5x-2)} \times \frac{(11x-1)\,(3x+1)}{7(x^2+4x+16)} \right] \div \left[\frac{(11x-1)\,(x-4)}{(5x-2)(x+1)} \right]$$

$$= \frac{(x-4)\,(11x-1)}{7(5x-2)} \times \frac{(5x-2)\,(x+1)}{(11x-1)\,(x-4)}$$

$$= \frac{x+1}{7}$$

(4) એક કસોટીમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે.

ગુણ	0-19	20-39	40-59	60-79	80 કે તેથી વધુ
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	100	300	400	100	100

૮૦ કે તેથી વધુ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો સરવાળો 9000 હોય તો માહિતીનો મધ્યક શોધો.

ગુણ	કુટુંબની સંખ્યા fi	મૂળ કિંમત xi	fixi
0-19	100	9.5	950
20-39	300	29.5	8850
40-59	400	49.5	19800
60-79	100	69.5	6950
80 કે તેથી વધુ	100	--	9000
	n = 1000		$\sum$ fixi = 45550

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{n}$

$= \frac{45550}{1000}$

$\bar{x} = 45.55$ ગુણ

(5) એક માહિતી નાં અવલોકનો $\frac{x}{5}, x, \frac{x}{4}, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}$ જ્યાં $x > o$ છે જો માહિતી નો મધ્યસ્થ 8 હોયતો x ની કિંમત શોધો અને મધ્યક મેળવો.

અવલોકનોનો ચઢતો ક્રમ : $\frac{x}{5}, \frac{x}{4}, \frac{x}{3}, \frac{x}{2}, x$

અહી, n = 5 જે અયુગ્મ છે.

$\therefore$ મધ્યસ્થ, $M = \frac{n+1}{2}$ માં અવલોકનની કિંમત

$= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2}$ માં અવલોકનની કિંમત

= 3 જુ અવલોકનની કિંમત

$\therefore\ M = \frac{x}{3}$

$\therefore\ 8 = \frac{x}{3}$

$\therefore 24 = x \qquad \therefore x = 24$

તેથી માહિતીના અવલોકનો $= \frac{24}{5},\ 24,\ \frac{\cancel{24}^{6}}{4},\ \frac{\cancel{24}^{8}}{3},\ \frac{\cancel{24}^{12}}{2}$

= 4.8, 24, 6, 8,12

$\therefore$ મધ્યક $\bar{x} = \frac{\sum xi}{n}$

$= \frac{4.8+24+6+8+12}{5}$

$= \frac{54.8}{5}$

$\therefore \bar{x} = 10.96$

પ્રશ્ન - 4 (ક) ગમે તે બે ગણો.

(1) $\angle ABC$ એ $\odot(P, r)$ના અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત ખૂણો છે. જો ΔABC સમદ્વીબાજુ ત્રિકોણ હોય અને AB=8 હોય, તો r(ત્રિજ્યા) શોધો.

$\angle ABC$ એ અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત ખૂણો હોવાથી કાટખૂણો છે.

$m\angle ABC = 90^0$ અને $\overline{AC}$ કર્ણ છે.

ΔABC સમદ્વીબાજુ છે.

$AB = 8 = BC$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (8)^2 + (8)^2$

$= 64 + 64$

$= 128$

$\therefore AC^2 = 64 \times 2$

$\therefore AC = 8\sqrt{2} = d$

$\therefore$ વ્યાસ $= 8\sqrt{2}$

$\therefore r = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

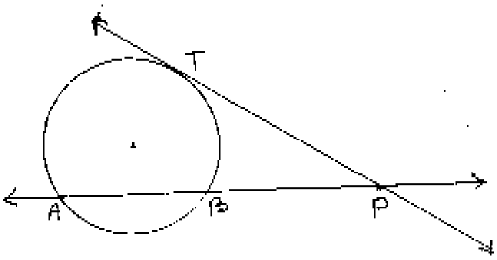
(2) એક વર્તુળની છેદિકા વર્તુળને A અને B બિંદુમાં છેદે છે. આ છેદિકાને વર્તુળના બહિર્ભાગના બિંદુ P આગળ છેદતો સ્પર્શક $\overleftrightarrow{PT}$ વર્તુળને T બિંદુએ સ્પર્શે છે. જો AP=10, PT= $5\sqrt{2}$ તો PB શોધો.

$PT^2 = PA.PB$

$\therefore (5\sqrt{2})^2 = 10 \times PB$

$\therefore \frac{25 \times 2}{10} = PB$

$\therefore PB = 5$



(3) $\square ABCD$ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. $m\angle A - m\angle C = 40$ તો $m\angle A$ શોધો.

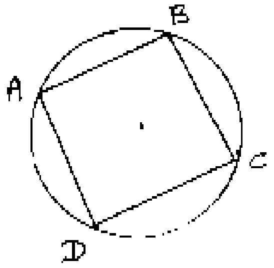
$\square ABCD$ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore m\angle A + m\angle C = 180$

$\therefore m\angle A + m\angle C = 180$

$\therefore \frac{m\angle A - m\angle C = 40}{\therefore 2m\angle A = 220}$

$\therefore m\angle A = 110$



(4) $\odot(P, r_1)$, $\odot(Q, r_2)$, $\odot(R, r_3)$ એકબીજાને પરસ્પર બહારથી સ્પર્શે છે. જો PQ=8, QR=10, PR=16 હોય તો $r_1+r_2+r_3$ શોધો.

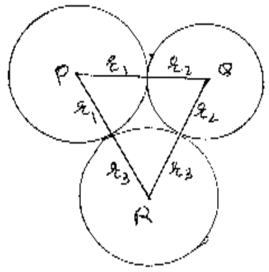
P, Q, R કેન્દ્રિત વર્તુળો પરસ્પર બહારથી સ્પર્શે છે.

$\therefore \frac{PQ + QR + PR}{2} = r_1 + r_2 + r_3$

$\therefore \frac{8 + 10 + 16}{2} = r_1 + r_2 + r_3$

$\therefore \frac{34}{2} = r_1 + r_2 + r_3$

$\therefore r_1 + r_2 + r_3 = 17$



(5) $\widehat{AB}$ એ $\odot$(P, 4) નું લઘુ ચાપ છે. જો AB=4 હોય તો $\widehat{AB}$ એ કેન્દ્ર P આગળ આંતરેલા ખૂણાનું માપ શોધો.

Δ APB માં AP = PB = AB = 4 છે.

$\therefore$ ΔAPB સમબાજુ ત્રિકોણ બનશે.

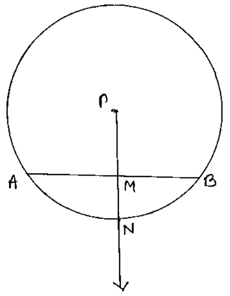
$\therefore$ $m\angle P = m\angle A = m\angle B$ થાય.

$\therefore$ $m\angle P + m\angle A + m\angle B = 180$

$\therefore$ $3m\angle P = 180$ $\therefore$ $m\angle P = 60^0$

$\widehat{AB}$ એ કેન્દ્ર P આગળ આંતરેલા ખૂણાનું માપ 60^0 છે.

(7) $\odot$ (P,13) માં $\overline{AB}$ જીવા છે. $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ છે. $M \in \overline{AB}$ છે. $\overrightarrow{PM}$ વર્તુળને N બિંદુમાં છેદે છે. જો MN=1 હોય તો AB શોધો.



PB = PN-MN

P-M-N હોવાથી PM=PN - MN

= 13 - 1

$\therefore$ PM = 12

કાટકોણ ΔPMB માં પાયથાગોરસ પ્રમેય મુજબ

$MB^2 = PB^2 - PM^2$

$= (13)^2 - (12)^2$

$= 169 - 144$

$\therefore MB^2 = 25$

$\therefore MB = 5$

હવે, $AB = 2MB$

$= 2 \times 5$

$\therefore AB = 10$

પ્રશ્ન - 4 (ડ) ગમે તે બે ગણો.

(1) $6x^2 + bx + C = 0$ નાં બીજ $\frac{1}{2}$ અને $\frac{2}{3}$ હોય તો b =.--------c= ------------થાય.

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{-2}{3}$

α અને β વાળું x ચલનું દ્વિઘાત સમીકરણ.

$\therefore$ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\therefore$ $x^2 - \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right]x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

$\therefore$ $x^2 - \left[\frac{3-4}{6}\right]x + \left(\frac{-1}{3}\right) = 0$

$\therefore$ $x^2 - \left[\frac{-1}{6}\right]x - \frac{1}{3} = 0$

$\therefore$ $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$

$\therefore$ $6x^2 + x - 2 = 0$ ને $6x^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતા.

$b = +1,\ c = -2$

(2) $x+\frac{1}{x}=\frac{34}{15}\ (x\neq 0)$ નો .ઉકેલ ગણ શોધો.

$$x+\frac{1}{x}=\frac{34}{15}$$

$$\therefore \frac{x^2+1}{x}=\frac{34}{15}$$
$$\therefore 15x^2+15=34x$$
$$\therefore 15x^2-34x+15=0$$
$$\therefore 15x^2-25x-9x+15=0$$
$$\therefore 5x\,(3x-5)-3(3x-5)=0$$

$$\therefore (3x-5)\,(5x-3)=0$$
$$\therefore 3x-5=0 \quad or \quad 5x-3=0$$
$$\therefore 3x-5=0 \qquad 5x=3$$
$$\therefore x=5/3 \qquad x=3/5$$

(3) $x^2+kx+k=1$ ને R માં ફક્ત એકજ ઉકેલ હોયતો k શોધો.

$x^2+kx+k=1$ ને R માં એક્જ ઉકેલ છે.

$x^2+kx+k-1=0$ માં $\Delta=0$ થાય.

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=k^2-4(1)\,(k-1)$$
$$\therefore k^2-4k+4=0$$
$$\therefore (k-2)^2=0$$
$$\therefore k-2=0$$
$$\therefore k=2$$

(4) જેનાં બીજ $\frac{3}{2}$ અને $\frac{2}{3}$ હોય તેવા દ્રિઘાત સમીકરણની રચના કરો.

$$\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=\frac{2}{3}$$
$$\alpha+\beta=\frac{3}{2}+\frac{2}{3} \quad , \quad \alpha\beta=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{9+4}{6} \qquad\qquad = 1$$
$$=\frac{13}{6}$$

$\therefore x$ ચલનું દ્વિઘાત સમી.

$$\rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\times\beta=0$$
$$\therefore x^2-\left(\frac{13}{6}\right)x+1=0$$
$$\therefore 6x^2-13x+6=0$$

પ્રશ્ન - 4 (ઇ) માગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

(1) શંકુનું ઘનફળ શોધવાનું સૂત્ર v = ______. (જવાબ : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

(2) એક રૂપિયાના સિક્કાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર =______ (જવાબ : $2\pi rh$)

(3) નક્કર અર્ધગોળાની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર ______છે. (જવાબ : $3\pi r^2$)

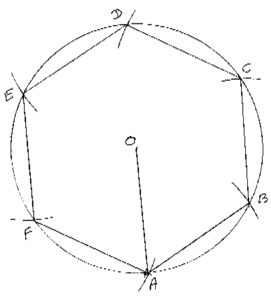
(4) 8 સેમી. ત્રિજ્યાવાળા ગોળાને પિગાળીને 4 સેમી. વ્યાસવાળા ______ગોળા બને. (જવાબ : 64 ગોળા બને)

(5) સરખી ત્રિજ્યા અને સરખી ઊંચાઇવાળા એક શંકુ અને એક નળાકાર છે.

જો શંકુનું ઘનફળ 33π ઘન સેમી હોય તો નળાકારનું ઘનફળ કેટલું ? (જવાબ : 99π ઘન. સે.મી.)

પ્રશ્ન - 5 (અ) નીચે આપેલ રચના દોરો અને મુદ્દા લખો.

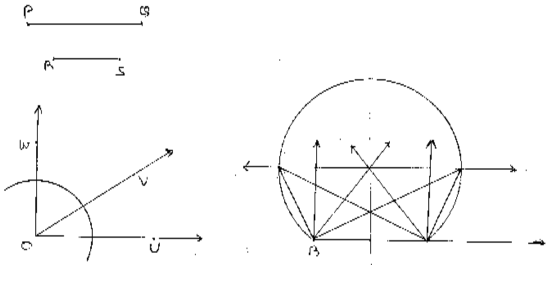
(1) $\odot(P,4)$ રચી તેને અંતર્ગત નિયમિત ષટ્કોણની રચના કરવી.



રચનાના મુદ્દા :
(1) $\odot(P,4)$ રચો.
(2) ⊙(A, 4) રચો. જે ⊙ (P, 4) ને B માં છેદે
(3) ⊙(B, 4) રચો. જે ⊙ (P, 4) ને C માં છેદે ($A \neq C$)
(4) ⊙(C,4) રચો. જે ⊙ (P, 4) ને D માં છેદે ($D \neq B$)
(5) ⊙(D,4) રચો. જે ⊙ (P, 4)ને E માં છેદે ($E \neq C$)
(6) ⊙(E,4) રચો. જે ⊙ (P, 4)ને F માં છેદે ($F \neq D$)
(7) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ રચો.

આમ, ABCDEF માગેલો ષટ્કોણ છે.

(2) ત્રિકોણનો આધાર, શિરઃકોણ અને શિરઃકોણમાંથી પસાર થતી વેધ આપેલ હોય તેવા ત્રિકોણની રચના કરવી.



રચનાના મુદ્દા :
(1) $\overrightarrow{BX}$ રચો.
(2) ⊙(B, PQ) રચો કે જે $\overrightarrow{BX}$ ને C માં છેદે.
(3) $\overline{BC}$ પર $\angle WOU$ ના માપનો ખૂણો સમાવતા વૃતખંડનું ચાપ રચો.
(4) B અને C બિંદુએ $\overleftrightarrow{BC}$ ને લંબ રેખાઓ અનુક્રમે ℓ અને m રચો.

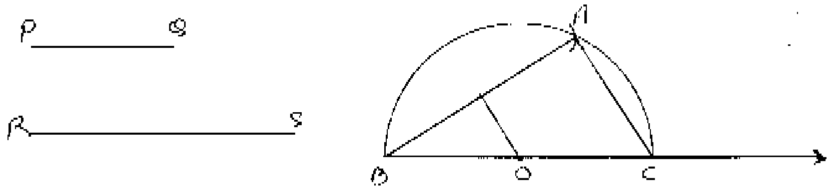
(5) $\odot$ (B, RS) અને $\odot$ (C, RS) રચો જે ℓ અને m ને અનુક્રમે વૃતખંડવાળા અર્ધતલમાં ℓ અને m ને D અને E માં છેદે.

(6) $\overleftrightarrow{DE}$ રચો જે વૃતખંડને બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને A^1 માં છેદે.

(7) $\overline{AB}$ અને $\overline{AC}$ $\odot$ (C, RS) રચો તથા $\overline{A^1B}, \overline{A^1C}$ રચો.

આમ ΔABC અને ΔA^1BC માગેલા ત્રિકોણ છે.

(3) કર્ણ અને એક બાજુ આપેલ હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ રચો.



રચનાના મુદ્દા : (1) $\overrightarrow{BX}$ રચો.

(2) $\odot$ (B, RS) રચો કે જે $\overrightarrow{BX}$ ને C માં છેદે.

(3) $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ O રચો.

(4) $\odot$ (O, OB) રચો.

(5) $\odot$ (B, PQ) રચો જે $\odot$ (O, OB) ને A માં છેદે.

(6) $\overline{BA}, \overline{AC}$ રચો.

આમ. ΔBAC માગેલો ત્રિકોણ છે.

પ્રશ્ન - 5 (બ) નીચે આપેલ દાખલા ગણો.

(1) $x^4 + y^4 \; \alpha \; x^2 y^2$ તો સા.કરો કે $x \; \alpha \; y$.

$x^4 + y^4 \; \alpha \; x^2 y^2$ તો $x \; \alpha \; y$.

$$\frac{x^4 + x^4}{x^2 \; y^2} = k \qquad (k = \text{શૂ.અ.})$$

બંને બાજુએ $\frac{1}{2}$ વડે ગુણતાં

$$\frac{x^4 + y^4}{2x^2 \; y^2} = \frac{k}{2}$$

→ યોગ વિયોગ લેતાં

$$\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^4-2x^2y^2+y^4}=\frac{K+2}{K-2}$$

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2-y^2)^2}=\frac{K+2}{K-2}$$

→ વર્ગમૂળ લેતાં

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\sqrt{\frac{K+2}{K-2}}=m.\ [k\neq\pm 2]$$

→ યોગ વિયોગ લેતાં

$$\frac{x^2+y^2+x^2-y^2}{x^2+y^2-x^2+y^2}=\frac{m+1}{m-1}$$

$$\frac{2x^2}{2y^2}=\frac{m+1}{m-1}$$

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{m+1}{m-1}$$

$\therefore \frac{x}{y}=\sqrt{\frac{m+1}{m-1}}=n$ [વર્ગ મૂળ લેતાં] $[m\neq\pm 1]$

$\therefore x=ny$ [$n=$ શૂ.અ.]

$\therefore x\alpha y$

(2) $\left(3+\frac{2}{x}\right)^2-4\left(3+\frac{2}{x}\right)-45=0$ ઉકેલ શોધો.

$$\left(3+\frac{2}{x}\right)^2-4\left(3+\frac{2}{x}\right)-45=0$$

$\therefore 3+\frac{2}{x}=m$ લેતાં,

$\therefore m^2-4m-45=0$

$\therefore (m-9)\ (m+5)=0$

$\therefore m=9$ or $m=-5$

$\therefore 3+\frac{2}{x}=9$ $\therefore 3+\frac{2}{x}=-5$

$\therefore 3x+2=9x$ $\therefore 3x+2=-5x$

$\therefore 2=9x-3x$ $\therefore 8x+2=0$

$\therefore 2=6x$ $\therefore x=\frac{-2}{8}$

$x=\frac{1}{3}$ $x=\frac{-1}{4}$

(3) Δ ABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે.

AB=5x, BC=3x-1 જો ત્રિકોણનું 25 ચો. એકમ હોય તો તેની બધી બાજુના માપ શોધો.

Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ AB x BC

$\therefore 25 \times 2 = 5x(3x-1)$

$\therefore 50 = 5x(3x-1)$

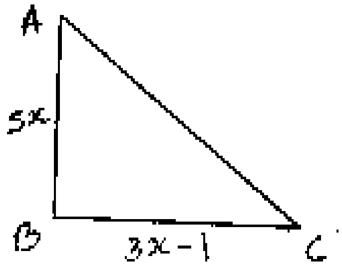
$\therefore 10 = 3x^2 - x$

$\therefore 3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore 3x^2 - 6x + 5x - 10 = 0$

$\therefore (x-2)(3x+5) = 0$

$\therefore$ **x = 2** $\quad \therefore x = -5/3$



બાજુનું માપ ઋણ ન હોઈ શકે $\therefore x = 2$

$AB = 5x = 5 \times 2 = 10$

$BC = 3x - 1 = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 10^2 + 5^2$

$= 100 + 25$

$= 125$

$AC = 5\sqrt{5}$

(4) $2\left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right] - 3\left[x + \frac{1}{x}\right] = 1$ નો R માં ઉકેલ મેળવો.

$2\left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right] - 3\left[x + \frac{1}{x}\right] - 1 = 0$

$\therefore \left[x + \frac{1}{x}\right] = m$ તો $\left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right] = m^2 - 2$ થાય.

$\therefore 2(m^2 - 2) - 3m - 1 = 0$

$\therefore 2m^2 - 4 - 3m - 1 = 0$

$\therefore 2m^2 - 3m - 5 = 0$

$\therefore 2m^2 + 2m - 5m - 5 = 0$

$\therefore 2m(m+1) - 5(m+1) = 0$

$m + 1 = 0$	$2m - 5 = 0$
$\therefore m = -1$	$m = 5/2$
$\therefore x^2 + 1 = -x$	$\therefore 2x^2 + 2 = 5x$
$\therefore x^2 + x + 1 = 0$	$\therefore 2x^2 - 5x + 2 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\therefore 2x^2 - 4x - x + 2 = 0$
$= 1^2 - 4(1)(1)$	$\therefore (x-2)(2x-1) = 0$
$= 1 - 4$	$\therefore x = 2 \quad x = 1/2$
$= -3 < 0$	

R માં ઉકેલ નથી.

પ્રશ્ન - 5 (ક) નીચે આપેલ દાખલા ગણો.

(1) Δ ABC માં A-M-B અને A-N-C તથા $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ છે. જો AM=6, MN = 7.5, AB = 8 હોય તો BC શોધો. $\therefore$ Δ ABC માં A-M-B અને A-N-C

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

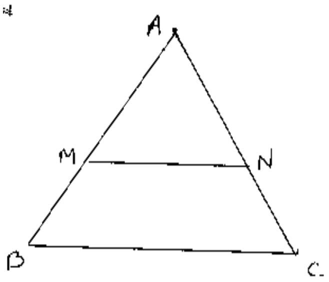
$$\therefore \frac{6}{8} = \frac{7.5}{BC}$$

$$\therefore 6 \times BC = 7.5 \times 8$$

$$\therefore BC = \frac{75 \times 8}{10 \times 6}$$

$$\therefore BC = \frac{100}{10}$$

$$\therefore BC = 10$$



(2) Δ ABC $\sim \Delta$ PQR, QR = 15.4, BC = 11.2 અને Δ PQR, નું ક્ષેત્રફળ 121 હોય તો Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

Δ ABC $\sim \Delta$ PQR

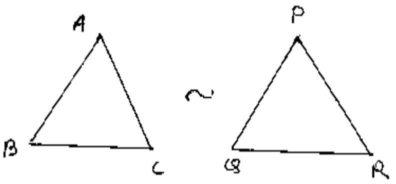
$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{121} = \frac{(11.2)^2}{(15.4)^2}$$

$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{121} = \frac{11.2 \times 11.2}{15.4 \times 15.4}$$

$$\therefore \Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{121^{11} \times 112^{8} \times 112^{8}}{154^{4} \times 154^{4}} = 64$$

14 14



(3) Δ ABC માં $\overline{AM}$ મધ્યગા છે. જો $AB^2+AC^2 = 290$ અને BC=16 હોય તો AM શોધો.

$\therefore$ એપોલોનિયસનાં પ્રમેય અનુસાર

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

$$\therefore 290 = 2AM^2 + 2(8)^2$$

$$\therefore 290 = 2AM^2 + 2(64)$$

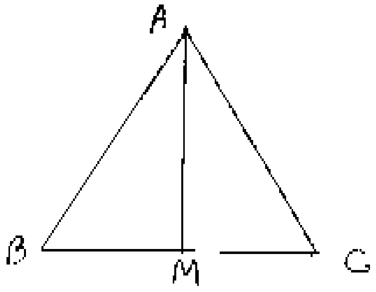
$$\therefore 290 = 2AM^2 + 128$$

$$\therefore 290 - 128 = 2AM^2$$

$$\therefore 162 = 2AM^2$$

$$\therefore AM^2 = \frac{162}{2}$$

$$\therefore AM^2 = 81 \qquad \therefore AM = 9$$



(4) ΔABC માં $\angle$A નો દ્વિભાજક $\overrightarrow{AD}$ છે તથા D$\in$ $\overline{BC}$ છે. જો AB = 6, AC = 9 અને BD = 4 હોય તો BC શોધો. ΔABC માં $\angle$A નો દ્વિભાજક $\overrightarrow{AD}$ છે તથા B-D-C છે.

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

$\therefore \frac{6}{9} = \frac{4}{DC}$

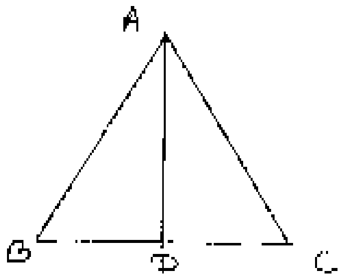
$\therefore DC = \frac{4\times 9}{6}$

$\therefore DC = 6$

$\therefore BC = BD + DC$

$\therefore BC = 4 + 6$

$\therefore BC = 10$



(5) ΔABC માં $\angle$B કાટકોણ છે. $\overline{BM}$ વેધ છે. જો AB = $\sqrt{20}$, AM = 4 હોય તો CM શોધો.

$AB^2 = AM \times AC$

$\therefore (\sqrt{20})^2 = 4 \times AC$

$\therefore 20 = 4 \times AC$

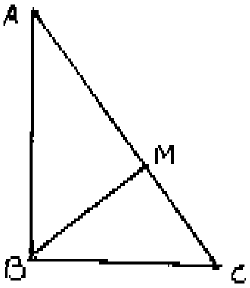
$\therefore AC = 5$

હવે $A - M - C$

$\therefore AC = AM + CM$

$\therefore 5 = 4 + CM$

$\therefore CM = 1$



પ્રશ્ન - 5 (ડ) માગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

(1) એક શંકુનું ઘનફળ 1570 ઘન સે.મી. છે. જો તેની ઊંચાઈ 15 સે.મી. હોય તો શંકુની ત્રિજ્યા શોધો.

શંકુનું ઘનફળ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 1570$ ($\pi = 3.14$)

$\therefore \frac{1}{3}\pi r^2 h = 1570$

$\therefore \frac{1}{3} \times 3.14 \times r^2 \times 15 = 1570$

$\therefore r^2 = \frac{1570 \times 3 \times 100}{15 \times 314}$

$\therefore r^2 = 100$

$\therefore r = 10$ સે.મી.

(2) એક શંકુ અને અર્ધગોળાની પાયાની ત્રિજ્યા અને ઘનફળ દર્શાવતી સંખ્યાઓ સરખી છે. તો શંકુની ઊંચાઈ અને ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર શોધો.

શંકુનું ઘનફળ = અર્ધ ગોળાનું ઘનફળ

$\therefore \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^3$

$\therefore h = 2r$

$\therefore \frac{h}{r} = \frac{2}{1}$

$\therefore h : r = 2 : 1$

(3) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 616 ચો.સે.મી. હોય તો તેની ત્રિજ્યા શોધો.

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $4\pi r^2$

$\therefore 616 = \frac{4 \times 22}{7} \times r^2$

$\therefore \frac{616 \times 7}{4 \times 22} = r^2$

$r^2 = 49$

$\therefore r = 7$ સે.મી.

(4) એક ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ 8 છે. તો તેની બાજુની લંબાઈ શોધો.

ધારો કે, □ $ABCD$ ચોરસ છે.

AB = BC = 8

ΔABC માં પાયથાગોરસ પ્રમેય મુજબ

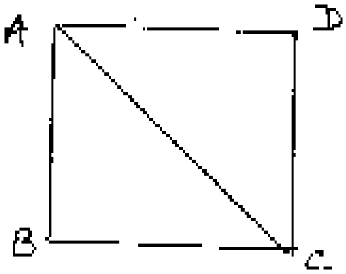
$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore x^2 + x^2 = 8^2$

$\therefore 2x^2 = 64$

$\therefore x^2 = 32$

$\therefore x = 4\sqrt{2}$



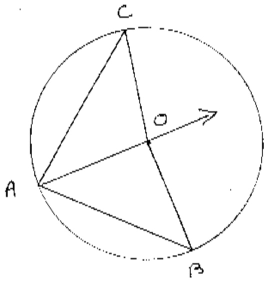
પ્રશ્ન - 5 (ઈ) માંગ્યા મુજબ જવાબ આપો.

(1) $\overset{\frown}{AB}$ અને $\overset{\frown}{AC}$ એ P કેન્દ્રિત વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ છે. જો P એ $\angle BAC$ ના અંદરના ભાગમાં હોય તો સાબિત કરો કે $\overrightarrow{AP}$ એ $\angle BAC$ નો દ્વિભાજક છે.

પક્ષ : $\overset{\frown}{AB}$ અને $\overset{\frown}{AC}$ એ P કેન્દ્રિત વર્તુળના એકરૂપ ચાપ છે. P એ $\angle BAC$ ના અંદરના ભાગમાં છે.

સાધ્ય : $\overrightarrow{AP}$ એ $\angle BAC$ નો દ્વિભાજક છે.

આકૃતિ :



સાબિતી : $\overset{\frown}{AB}$ અને $\overset{\frown}{AC}$ એ P કેન્દ્રિત વર્તુળના એકરૂપ ચાપ છે. (પક્ષ)

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (પ્રમેય 19)

ΔAPB અને ΔAPC માં

$\overline{AP} \cong \overline{AP}$ (સામાન્ય)
$\overline{BP} \cong \overline{CP}$ (એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા)
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (પરિણામ (1)

$\therefore$ સંગતતા $APB \leftrightarrow APC$ એકરૂપતા છે.(બા.બા.બા.)
$m\angle BAP = m\angle CAP$

અને બિંદુ P એ $\angle BAC$ ના અંદરના ભાગમાં છે. (પક્ષ)

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ એ $\angle BAC$ નો દ્વિભાજક છે.

(અથવા)

પ્રશ્ન - 5 (ઈ) નીચેના પ્રશ્નનાં જવાબ આપો.

(1) ⊙(P,7) નો વ્યાસ $\overline{AB}$ હોય તો $\overline{AB}$ નું માપ શોધો. જવાબ : 14 એકમ

(2) "r- ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં અર્ધવર્તુળની લંબાઈ કેટલી થાય ? જવાબ : πr

(3) ⊙(P,r) ને ગણની ભાષામાં લખો. જવાબ : $\{A / PA = r,\ A \in \alpha$ સમતલ$\}$

(4) "એક જ વર્તુળનાં બે અર્ધવર્તુળની અનુરૂપ જીવાઓ એકરૂપ હોતી નથી." -વિધાન સાચુ છે કે ખોટુ તે જણાવો.
જવાબ : વિધાન ખોટું છે.

(5) વર્તુળની વ્યાખ્યા પરથી કઈ બાબતો સ્પષ્ટ થાય છે ?
જવાબ : (૧) વર્તુળ સમતલીય આકૃતિ છે.
(૨) વર્તુળનું કેન્દ્ર વર્તુળના સમતલમાં હોય છે પણ તે વર્તુળનું બિંદુ નથી.

(6) વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલી લંબાઈની જીવાથી બનતો ચાપ કેન્દ્ર આગળ કેટલા અંશનો ખૂણો આંતરે ? જવાબ : 60^0