Series SSR/1

Code No. **65/1/1**
कोड नं.

Roll No.
रोल नं.

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.
विद्यार्थी उत्तर-पुस्तिका में कोड नं. अवश्य लिखें।

- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- कृपया जांच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।
- कृपया जांच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।**

MATHEMATICS
गणित

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 100*
निर्धारित समय : 3 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 100*

General Instructions :

1. *All questions are compulsory.*
2. *The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of one mark each, Section B comprises of 12 questions of four marks each and Section C comprises of 7 questions of six marks each.*
3. *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*
4. *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*
5. *Use of calculators is not permitted.*

सामान्य निर्देश :

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
2. इस प्रश्नपत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं अ, ब तथा स। खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है। खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है। खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है।
3. खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिये जा सकते हैं।
4. पूर्ण प्रश्नपत्र में विकल्प नहीं है। फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है।
5. कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

Section A

खण्ड अ

1. If $f(x) = x + 7$ and $g(x) = x - 7$, $x \in R$, find (fog) (7)

यदि $f(x) = x + 7$ तथा $g(x) = x - 7$, $x \in R$, तो (fog) (7) ज्ञात कीजिए।

2. Evaluate : $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

मान ज्ञात कीजिए : $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

3. Find the value of x and y if : $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

x तथा y के मान ज्ञात कीजिए यदि : $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

4. Evaluate : $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$

मान ज्ञात कीजिए : $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$

5. Find the co-factor of a_{12} in the following :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

निम्न में a_{12} का सहखंड ज्ञात कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

6. Evaluate : $\int \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$

7. Evaluate : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

8. Find a unit vector in the direction of $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

9. Find the angle between the vectors $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

सदिशों $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

10. For what value of λ are the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ perpendicular to each other ?

λ के किस मान के लिए सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ तथा सदिश $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हैं ?

Section B

खण्ड ब

11. (i) Is the binary operation *, defined on set N, given by $a * b = \frac{a+b}{2}$ for all $a, b \in N$, commutative ?

(ii) Is the above binary operation * associative ?

(i) क्या द्विआधारी संक्रिया *, जो समुच्चय N पर परिभाषित है तथा सभी $a, b \in N$ के लिए $a * b = \frac{a+b}{2}$ द्वारा प्रदत्त है, क्रम विनिमेयकारी है ?

(ii) क्या उपरोक्त द्विआधारी संक्रिया * साहचर्यकारी है ?

12. Prove the following :

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

13. Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. Express A as sum of two matrices such that one is symmetric and the other is skew symmetric.

OR

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, verify that $A^2 - 4A - 5I = 0$

माना $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. A को ऐसे दो आव्यूहों के योग के रूप में लिखिए जिनमें से एक सममित आव्यूह तथा दूसरा विषम सममित आव्यूह है।

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो सत्यापित कीजिए कि $A^2 - 4A - 5I = 0$

14. For what value of k is the following function continuous at $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x < 2 \\ k & ; \quad x = 2 \\ 3x-1 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

k के किस मान के लिए निम्न फलन $x = 2$ पर सतत है ?

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x < 2 \\ k & ; \quad x = 2 \\ 3x-1 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

15. Differentiate the following with respect to x :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$$

निम्न का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$$

16. Find the equation of tangent to the curve $x = \sin 3t$, $y = \cos 2t$, at $t = \pi/4$

वक्र $x = \sin 3t$, $y = \cos 2t$ के बिन्दु $t = \pi/4$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

18. Solve the following differential equation :

$(x^2 - y^2)\, dx + 2\, xy\, dy = 0$

given that $y = 1$ when $x = 1$

OR

Solve the following differential equation :

$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2y-x)}{x(2y+x)}$, if $y = 1$ when $x = 1$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$(x^2 - y^2)\, dx + 2\, xy\, dy = 0$

दिया है कि जब $x = 1$ है तो $y = 1$

अथवा

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2y-x)}{x(2y+x)}$, यदि $y = 1$ जब $x = 1$

19. Solve the following differential equation :

$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$

20. If $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$, find a vector $\vec{c}$ such that $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ and $\vec{a} . \vec{c} = 3$

OR

If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ and $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ and $|\vec{c}| = 7$, show that the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is 60°.

यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$, तो सदिश $\vec{c}$ ज्ञात कीजिए यदि $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ तथा $\vec{a} . \vec{c} = 3$

अथवा

यदि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ तथा $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ तथा $|\vec{c}| = 7$, तो दर्शाइए कि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण 60° का है।

21. Find the shortest distance between the following lines :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1} \text{ and } \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$$

Or

Find the point on the line $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ at a distance $3\sqrt{2}$ from the point (1, 2, 3)

निम्न रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1} \text{ तथा } \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$$

अथवा

रेखा $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2, 3) से $3\sqrt{2}$ की दूरी पर हो।

22. A pair of dice is thrown 4 times. If getting a doublet is considered a success, find the probability distribution of number of successes.

पासों का एक युग्म चार बार फेंका गया। यदि दोनों पासों पर एक ही संख्या आना सफलता माना जाए, तो सफलताओं की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

Section C

खण्ड स

23. Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$$

24. Show that the rectangle of maximum area that can be inscribed in a circle is a square.

OR

Show that the height of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a cone of height h is $\frac{1}{3}h$.

सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के अन्तर्गत निर्मित अधिकतम क्षेत्रफल का आयत एक वर्ग होगा।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि किसी शंकु जिसकी ऊँचाई h है, के अन्तर्गत अधिकतम आयतन वाले निर्मित बेलन की ऊँचाई $\frac{1}{3}h$ होगी।

25. Using integration find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the circle $4x^2 + 4y^2 = 9$.

समाकलन का प्रयोग करते हुए परवलय $y^2 = 4x$ तथा वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

26. Evaluate : $\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx$

मान ज्ञात कीजिए : $\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx$

27. Find the equation of the plane passing through the point (–1, –1, 2) and perpendicular to each of the following planes :

$$2x + 3y - 3z = 2 \text{ and } 5x - 4y + z = 6$$

OR

Find the equation of the plane passing through the points (3, 4, 1) and (0, 1, 0) and parallel to the line $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-2}{5}$

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि बिन्दु (–1, –1, 2) से होकर जाता है तथा निम्नलिखित दोनों तलों पर लम्बवत् है :

$$2x + 3y - 3z = 2 \text{ तथा } 5x - 4y + z = 6$$

अथवा

उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (3, 4, 1) और (0, 1, 0) से होकर जाता है तथा सरल रेखा $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-2}{5}$ के समान्तर है।

28. A factory owner purchases two types of machines, A and B for his factory. The requirements and the limitations for the machines are as follows :

Machine	Area occupied	Labour force	Daily output (in units)
A	1000 m^2	12 men	60
B	1200 m^2	8 men	40

He has maximum area of 9000 m^2 available, and 72 skilled labourers who can operate both the machines. How many machines of each type should he buy to maximise the daily output ?

एक फैक्ट्री मालिक A और B दो प्रकार की मशीनें अपनी फैक्ट्री के लिए क्रय करता है। इन मशीनों की आवश्यकताएँ तथा सीमाएँ निम्नवत् हैं :

मशीन	क्षेत्रफल जितना स्थान घेरती है	श्रमिकों की आवश्यकता	प्रतिदिन उत्पादन (इकाई संख्या)
A	1000 वर्ग मी	12 व्यक्ति	60
B	1200 वर्ग मी	8 व्यक्ति	40

फैक्ट्री मालिक के पास अधिकतम 9000 वर्ग मी क्षेत्र तथा 72 कुशल श्रमिक उपलब्ध हैं जो दोनों प्रकार की मशीनें चला सकते हैं। उसे प्रत्येक प्रकार की कितनी-कितनी मशीनें खरीदनी चाहिए जिससे कि अधिकतम उत्पादन संभव हो सके ?

29. An insurance company insured 2000 scooter drivers, 4000 car drivers and 6000 truck drivers. The probability of an accident involving a scooter, a car and a truck are 0.01, 0.03 and 0.15 respectively. One of the insured persons meets with an accident. What is the probability that he is a scooter driver.

एक बीमा कम्पनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों तथा 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। एक स्कूटर, कार तथा ट्रक के दुर्घटनाग्रस्त होने की प्रायिकताएं क्रमशः 0.01, 0.03 तथा 0.15 हैं। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है ?