

1999

## STATISTICS

## Paper 1

Time : 3 Hours ]

[ Maximum Marks : 300

**INSTRUCTIONS**

*Each question is printed both in English and in Kannada.*

*Answers must be written in the medium specified (English or Kannada) in the Admission Ticket issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer book in the space provided for this purpose. No credit will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Ticket.*

*Candidates should attempt any five questions choosing at least one but not more than two from each Section.*

*Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.*

*The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.*

**ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ :** ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸೂಚನೆಗಳ ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

[Turn over

SECTION A  
(Probability)

1. (a) State and prove the generalization of multiplicative theorem.
- (b) In a bolt factory, machines A, B and C manufacture 25%, 35% and 40% respectively of the total. Of their output, 5, 4, 2 per-cent are defective bolts. A bolt is drawn at random from the product and is found to be defective. What are the probabilities that it was manufactured by machines A, B and C ?
- (c) A problem in statistics is given to three students — A, B and C whose chances of solving it are  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$  and  $\frac{1}{4}$  respectively. What is the probability that the problem will be solved if all of them try independently ? 20+20+20
2. (a) Define a random variable. Show that the sum, difference and product of two random variables is also a random variable.
- (b) Define Characteristic Function and derive its properties.
- (c) For the following probability distribution,
- $$f(x) = y_0 e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$
- find  $y_0$ , mean and standard deviation. 20+15+25
3. (a) State and prove the Kolmogorov Inequality.
- (b) State and prove the Strong Law of Large Numbers. 30+30
4. (a) State and prove the Lindberg-Levy Central Limit Theorem.
- (b) Define Convergence in Probability and Convergence in Distribution. Show that the former implies the latter. Is the converse true ? 30+30

**ವಿಭಾಗ A**  
(ಸಂಭಾವ್ಯತೆ)

1. (1) ಗುಣಕಸಾಧ್ಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧಾರಣೀಕರಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ ಮತ್ತು ರುಜುವಾತು ಮಾಡಿ.

(ii) ಅಗುಳಿಗಳನ್ನು (bait) ತಯಾರಿಸುವ ಒಂದು ಕಾರ್ಯಾನೆಯಲ್ಲಿ ಎ, ಬಿ ಮತ್ತು ಸಿ ಯಂತ್ರಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ತಯಾರಿಕೆಯ 25%, 35% ಮತ್ತು 40% ರಷ್ಟನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಶೇಕಡಾ 5, 4, 2 ರಷ್ಟು ದೋಷಯುಕ್ತ ಅಗುಳಿಗಳಾಗಿವೆ. ಉತ್ಪನ್ನದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಅಗುಳಿಯನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡಾಗ ಅದು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಅಗುಳಿಯು ಎ, ಬಿ ಮತ್ತು ಸಿ ಯಂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗಿರುವುದರ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು ?

(iii) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಎ, ಬಿ ಮತ್ತು ಸಿ ಎಂಬ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದ್ದು, ಅವರು ಅದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$  ಮತ್ತು  $\frac{1}{4}$  ರಷ್ಟಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲರೂ ಅದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದೇ ಆದರೆ, ಅದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು ?

20+20+20

2. (ಎ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಬರವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಎರಡು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರಗಳ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹಾಗೂ ಉಪಲಬ್ಧಿಯೂ ಕೂಡ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚರವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿಕೊಡಿ.

(ಬಿ) ಎತಿಷ್ಠ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

(ಸಿ) ಒಂದು ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ :

$$f(x) = y_0 e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$

ಇದಕ್ಕೆ  $y_0$ , ಮಾಧ್ಯ (Mean) ಹಾಗೂ ಶಿಷ್ಠ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 20+15+25

3. (ಎ) ಕಾರ್ಯೋಗೋರೋವ್ ಅಸಮಾನತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(ಬಿ) ದೂರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಲ ನಿಯಮವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

30+30

(ಎ) ಲಿಂಚ್‌ಬರ್ಗ್-ಲೆವಿ ಕೇಂದ್ರ ಪರಿಮಿತಿ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(ಬಿ) ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಹಾಗೂ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಮೊದಲನೆಯದು ಅನಂತರದ್ದನ್ನು ಧ್ವನಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿಕೊಡಿ. ಇದರ ಘಟಕವೂ ನಿಜವೆ ?

30+30

SECTION B  
(Statistical Inference)

5. (a) Write explanatory notes on the following :
- (i) Consistency
  - (ii) Unbiasedness
  - (iii) Efficiency, and
  - (iv) Sufficiency of Estimators
- (b) Show that consistency neither implies nor is implied by unbiasedness.
- (c) State and prove the Lehmann-Scheffe Theorem. 15+20+25
6. (a) State and prove the Fisher-Neymann Factorization Theorem.
- (b) Obtain sufficient statistic for  $\theta$ , from an independent sample from,  

$$f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad \theta < x < +\infty$$
- (c) Show that maximum likelihood estimators are consistent. 20+20+20
7. (a) State and prove Neyman-Pearson Lemma.
- (b) Use the Neyman-Pearson Lemma to obtain the best critical region for testing  $\theta = \theta_0$  against  $\theta = \theta_1 (> \theta_0)$  in the case of a normal population  $N(\theta, \sigma^2)$ , when  $\sigma^2$  is known. Find the power of the test.
- (c) Define Monotone Likelihood Ratio. Show that the uniform distribution  $U[0, \theta]$  admits ML Ratio. 25+15+20
8. (a) If  $X \sim b(n, p)$ , derive  $\alpha$ -level likelihood ratio test of  $H_0 : p \leq p_0$  against  $H_1 : p > p_0$ .
- (b) Stating the regularity conditions on  $f(X, \theta)$ , show that  $-2 \log \lambda(X)$  is asymptotically distributed as a chi-square random variable, where  $\lambda(X)$  is the likelihood ratio. 30+30

**ವಿಭಾಗ B**  
(ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ತೀರ್ಮಾನ)

5. (ಎ) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ಟಿಪ್ಪಣಿ ಬರೆಯಿರಿ :

- (i) ಸ್ಥಿರತೆ
- (ii) ಪೂರ್ವಾಗ್ರಹರಾಹಿತ್ಯ
- (iii) ದಕ್ಷತೆ, ಹಾಗೂ
- (iv) ಅಂದಾಜುಕಾರಿಗಳ ಪರ್ಯಾಯತೆ

(ಬಿ) ಸ್ಥಿರತೆಯು ಪೂರ್ವಾಗ್ರಹರಾಹಿತ್ಯವನ್ನು ಧ್ವನಿಸುವುದೂ ಇಲ್ಲ ಮತ್ತು ಪೂರ್ವಾಗ್ರಹರಾಹಿತ್ಯದಿಂದ ಧ್ವನಿತವಾಗುವುದೂ ಇಲ್ಲ.

(ಸಿ) ಲೆಹ್ಮನ್-ಷೆಫೆ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿ. 15+20+25

6. (ಎ) ಫಿಷರ್-ನೇಮನ್ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ (Factorization) ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(ಬಿ) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸ್ವತಂತ್ರ ಮಾದರಿಯಿಂದ  $\theta$ ಗೆ ಪರ್ಯಾಯತೆ ನಿರ್ದರ್ಶನವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

$$f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad 0 < x < +\infty$$

(ಸಿ) ಗರಿಷ್ಠ ಸಾಧ್ಯತಾ ಅಂದಾಜುಕಾರಿಗಳು ಸ್ಥಿರತೆಯುಳ್ಳವು ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿಕೊಡಿ. 20+20+20

7. (ಎ) ನೇಮನ್-ಪಿಯರ್ಸನ್ ಲೆಮ್ಮಾವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(ಬಿ)  $\sigma^2$  ಗೊತ್ತಿದ್ದಾಗ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನಸಂಖ್ಯೆ  $N(\theta, \sigma^2)$  ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ  $\theta = \theta_1 (> \theta_0)$  ಗೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ  $0 = \theta_0$  ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಆತ್ಮತಮ ಸಂಧಿಸ್ಥ ವಲಯವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನೇಮನ್-ಪಿಯರ್ಸನ್ ಲೆಮ್ಮಾವನ್ನು ಬಳಸಿ, ಪರೀಕ್ಷಣೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) ಪಾಸೋಟೋನ್ ಸಾಧ್ಯತಾ ಅನುಪಾತವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಎಕರೂಪ ವಿತರಣೆ  $U(0, \theta)$ , ಎಂ.ಎಲ್. ಅನುಪಾತವನ್ನು ಅನುಮತಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿಕೊಡಿ. 25+15+20

8. (ಎ)  $X \sim b(n, p)$  ಆದರೆ,  $H_1 : p > p_0$  ಗೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ  $H_0 : p \leq p_0$  ಇದರ  $\alpha$ -ಹಂತ ಸಾಧ್ಯತೆ ಅನುಪಾತ ಪರೀಕ್ಷೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಗೊಳಿಸಿ.

(ಬಿ)  $f(X, \theta)$  ಮೇಲಿನ ನಿಯಂತ್ರತಾ ಸ್ಥಿತಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ,  $-2 \log \lambda(X)$  ಇದು ಕೈ-ಸ್ಕೇರ್ (chi-square) ಯಾದ್ಯಭಿಚರವಾಗಿ ಅಸಿಂಪ್ಯೂಟಿಕಲ್ ಆಗಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ  $\lambda(X)$  ಸಾಧ್ಯತಾ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ. 30+30

## SECTION C

## (Linear Inference and Multivariate Analysis)

9. Stating the assumptions, clearly show that  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$  is the best linear unbiased estimator of  $\beta$  in the general linear model  $Y = X\beta + e$ . Also, derive the expression for the variance-covariance matrix of error components.

60

10. (a) Define a Linear Hypothesis. Derive a statistical test procedure to test the hypothesis that the last  $s$  elements in  $\beta$  of the linear model,

$$Y = X\beta + \epsilon$$

are jointly equal to zero, where  $\beta$  is a  $K$  component column vector.

- (b) Derive a test procedure to test the significance of complete regression.

30+30

11. (a) If  $X$  and  $Y$  are standardized random variables, and the correlation coefficient between  $aX + bY$  and  $bX + aY$  is  $\frac{1+2ab}{a^2+b^2}$ , find the correlation coefficient between  $X$  and  $Y$ .

- (b) Define Non-linear Regression. Prove that  $r^2 \leq \eta^2$ , where  $r$  and  $\eta$  are the correlation coefficient and correlation ratio respectively.

- (c) In a three-variable linear model, with usual notation, prove that,

$$R_{123}^2 = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}$$

20+20+20

12. (a) Explain Fisher's Discriminant Analysis.
- (b) Define Hotelling's  $T^2$  and Mahalanobis'  $D^2$  statistics. What are their uses? Bring out the relationship between them.
- (c) Write explanatory notes on the following :

- (i) Orthogonal polynomials
- (ii) Partial correlation
- (iii) Multivariate normal distribution

20+20+20

## ವಿಭಾಗ C

(ರೇಖಾತ್ಮಕ ತೀರ್ಮಾನ ಮತ್ತು ಬಹುವ್ಯತ್ಯಾಸಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ)

9. ಗ್ರಹಿಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಸುತ್ತ, ಸಾಮಾನ್ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾದರಿ  $Y = X\beta + \varepsilon$  ಯಲ್ಲಿ  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$  ಇದು  $\beta$  ದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ವಾಗ್ರಹರಹಿತ ಅಂದಾಜುಕಾರಿ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. ಹಾಗೂ, ದೋಷ ಉಪಾಂಗಗಳ ಚಲನೀಯತೆ - ಸಹಚಲನೀಯತೆ ಮಾತೃಕೆಗೆ (Matrix) ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ನಿವ್ವಳಗೊಳಿಸಿ.

60

10. (ಎ) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು (hypothesis) ವಿವರಿಸಿ.  $Y = X\beta + \varepsilon$  ಎಂಬ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾದರಿಯ  $\beta$  ದಲ್ಲಿರುವ ಕೊನೆಯ ಮೂಲಾಂಶಗಳು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿವೆ ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಪರೀಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ  $\beta$  ಎಂಬುದು  $K$  ಉಪಾಂಗದ ಕಾಲಂ ವೆಕ್ಟರ್ ಆಗಿದೆ.

(ಬಿ) ಸಂಪೂರ್ಣ ಹಿಂಚಲನೆಯ (regression) ಮಹತ್ವವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

30+30

11. (ಎ)  $X$  ಮತ್ತು  $Y$  ಗಳು ಪ್ರಮಾಣೀಕೃತ ಯಾದೃಚ್ಯಕ ಚರಗಳಾಗಿದ್ದು,  $aX + bY$  ಮತ್ತು  $bX + aY$  ಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧಿ ಗುಣಾಂಕವು  $\frac{1+2ab}{a^2+b^2}$  ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ  $X$  ಮತ್ತು  $Y$  ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಹಸಂಬಂಧಿ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) ಅರೇಖಾತ್ಮಕ ಹಿಂಚಲನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ,  $r^2 \leq 1$  ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ  $r$  ಮತ್ತು  $\gamma$  ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಹಸಂಬಂಧಿ ಗುಣಾಂಕ ಹಾಗೂ ಸಹಸಂಬಂಧಿ ಅನುಪಾತಗಳಾಗಿವೆ.

(ಸಿ) ಮೂರು ಚರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಜ್ಞೆಯೊಂದಿಗೆ

$$R_{1-23}^2 = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

20+20+20

12. (ಎ) ಪಿಪರ್‌ನ ವಿಭೇದಾತ್ಮಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

(ಬಿ) ಪಾಟಿಲಿಂಗ್‌ನ  $T^2$  ಮತ್ತು ಮಹಾಲನೊಬಿಸ್‌ನ  $D^2$  ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗವೇನು ? ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

(ಸಿ) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ಟಿಪ್ಪಣಿ ಬರೆಯಿರಿ :

(i) ಆರ್ಥೋಗೋನಲ್ ಪಾಲಿನಾಮಿಯಲ್ಸ್

(ii) ಭಾಗಶಃ ಸಹಸಂಬಂಧ

(iii) ಬಹುವ್ಯತ್ಯಾಸಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿತರಣೆ

20+20+20