SET-2

Series BVM/3

कोड नं.
Code No. **65/3/2**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित
MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours — *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) इस प्रश्न-पत्र में ***29*** *प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में* ***4*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***एक अंक*** *का है । खण्ड ब में* ***8*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***दो अंक*** *का है । खण्ड स में* ***11*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***चार अंक*** *का है । खण्ड द में* ***6*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***छः अंक*** *का है ।*

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।

(iv) पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी खण्ड अ के 1 प्रश्न में, खण्ड ब के 3 प्रश्नों में, खण्ड स के 3 प्रश्नों में तथा खण्ड द के 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।

(v) कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति ***नहीं*** *है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) The question paper consists of ***29*** *questions divided into four sections : A, B, C and D. Section A comprises of* ***4*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***8*** *questions of* ***two marks*** *each, Section C comprises of* ***11*** *questions of* ***four marks*** *each and Section D comprises of* ***6*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.

(iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 1 question of Section A, 3 questions of Section B, 3 questions of Section C and 3 questions of Section D. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.

(v) Use of calculators is ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Questions number 1 to 4 carry 1 mark each.

1. अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} - 2y = 2x^2$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए ।

Find the integrating factor of the differential equation $x \frac{dy}{dx} - 2y = 2x^2$.

2. यदि $xy^2 - x^2 = 4$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

Find $\frac{dy}{dx}$, if $xy^2 - x^2 = 4$.

3. यदि वर्ग आव्यूह A की कोटि 3 और $|A| = 4$ है, तो $|-2A|$ का मान लिखिए ।

If A is a square matrix of order 3 with $|A| = 4$, then write the value of $|-2A|$.

4. यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात $-18, 12, -4$ हैं, तो इसके दिक्-कोसाइन क्या हैं ?

अथवा

बिन्दु $(-2, 4, -5)$ से गुज़रने वाली उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\frac{x+3}{3} = \frac{4-y}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समांतर है ।

If a line has the direction ratios $-18, 12, -4$, then what are its direction cosines ?

OR

Find the cartesian equation of the line which passes through the point $(-2, 4, -5)$ and is parallel to the line $\frac{x+3}{3} = \frac{4-y}{5} = \frac{z+8}{6}$.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Questions number 5 to 12 carry 2 marks each.

5. समुच्चय $R - \{-1\}$ पर परिभाषित द्विआधारी संक्रिया $* : a * b = \frac{a}{b+1}$, $a, b \in R - \{-1\}$ है । दिखाइए कि $R - \{-1\}$ में $*$ न तो क्रमविनिमेय है और न ही साहचर्य है ।

Let $*$ be a binary operation on $R - \{-1\}$ defined by

$a * b = \frac{a}{b+1}$, for all $a, b \in R - \{-1\}$.

Show that $*$ is neither commutative nor associative in $R - \{-1\}$.

6. यदि $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो दिखाइए कि $A^3 = A$.

If $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, then show that $A^3 = A$.

7. स्वेच्छ अचरों 'm' तथा 'a' को विलुप्त करते हुए वक्रों के कुल $y^2 = m(a^2 - x^2)$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण बनाइए ।

Form the differential equation representing the family of curves $y^2 = m(a^2 - x^2)$ by eliminating the arbitrary constants 'm' and 'a'.

8. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}\, dx, \quad 0 < x < \pi/2$$

Find :

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}\, dx, \quad 0 < x < \pi/2$$

9. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin (x - a)}{\sin (x + a)}\, dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int (\log x)^2\, dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin (x - a)}{\sin (x + a)}\, dx$$

OR

Find :

$$\int (\log x)^2\, dx$$

10. एक परिवार की फोटो हेतु माँ, पिता व बेटे को एक लाइन में यादृच्छया खड़ा किया जाता है । यदि दो घटनाएँ A और B निम्न रूप में परिभाषित हों, तो P(B/A) ज्ञात कीजिए :

घटना A : बेटा एक किनारे पर, घटना B : पिता बीच में

Mother, father and son line up at random for a family photo. If A and B are two events given by A = Son on one end, B = Father in the middle, find P(B/A).

11. मान लीजिए X एक यादृच्छिक चर है जिसके संभावित मूल्य x_1, x_2, x_3, x_4 इस प्रकार हैं :

$$2P(X = x_1) = 3P(X = x_2) = P(X = x_3) = 5P(X = x_4).$$

X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए ।

अथवा

एक सिक्का 5 बार उछाला जाता है । (i) कम-से-कम 4 चित, और (ii) अधिक-से-अधिक 4 चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

Let X be a random variable which assumes values x_1, x_2, x_3, x_4 such that

$$2P(X = x_1) = 3P(X = x_2) = P(X = x_3) = 5P(X = x_4).$$

Find the probability distribution of X.

OR

A coin is tossed 5 times. Find the probability of getting (i) at least 4 heads, and (ii) at most 4 heads.

12. सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ जहाँ, $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$, दोनों के लम्बवत् एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए ।

अथवा

दिखाइए कि सदिश $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ समतलीय हैं ।

Find a unit vector perpendicular to both the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, where $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

OR

Show that the vectors $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ and $\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ are coplanar.

खण्ड स
SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Questions number 13 to 23 carry 4 marks each.

13. दिखाइए कि पूर्णांक समुच्चय Z पर परिभाषित संबंध R = {(a, b) : (a – b), 2 से विभाजित है} एक तुल्यता संबंध है ।

अथवा

यदि $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}, x \neq \frac{2}{3}$ है, तो दिखाइए कि सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए, $fof(x) = x$ है । f का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए ।

Show that the relation R on the set Z of all integers, given by R = {(a, b) : 2 divides (a – b)} is an equivalence relation.

OR

If $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}, x \neq \frac{2}{3}$, show that $fof(x) = x$ for all $x \neq \frac{2}{3}$. Also, find the inverse of f.

14. यदि $\sin y = x \sin (a + y)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

अथवा

यदि $(\sin x)^y = x + y$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $\sin y = x \sin (a + y)$, prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

OR

If $(\sin x)^y = x + y$, find $\frac{dy}{dx}$.

15. यदि $\sin^{-1}\left(\frac{3}{x}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\sin^{-1}\left(\frac{3}{x}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, then find the value of x.

16. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

17. यदि $y = (\cot^{-1} x)^2$ है, तो दर्शाइए कि $(x^2 + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 2.$

If $y = (\cot^{-1} x)^2$, show that $(x^2 + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 2.$

18. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin 2x}{(\sin^2 x + 1)(\sin^2 x + 3)} dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin 2x}{(\sin^2 x + 1)(\sin^2 x + 3)} dx$$

19. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$$

अत:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$$ का मूल्यांकन कीजिए ।

Prove that

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$$ and hence evaluate

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}.$$

20. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$ को हल कीजिए ।

अथवा

अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx$$

Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

OR

Solve the differential equation :

$$(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx$$

21. λ का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं :

$$\frac{x-5}{5\lambda+2} = \frac{2-y}{5} = \frac{1-z}{-1}; \quad \frac{x}{1} = \frac{y+\frac{1}{2}}{2\lambda} = \frac{z-1}{3}$$

अत: ज्ञात कीजिए कि क्या ये रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं या नहीं ।

Find the value of λ for which the following lines are perpendicular to each other :

$$\frac{x-5}{5\lambda+2} = \frac{2-y}{5} = \frac{1-z}{-1}; \quad \frac{x}{1} = \frac{y+\frac{1}{2}}{2\lambda} = \frac{z-1}{3}$$

Hence, find whether the lines intersect or not.

22. मान लीजिए $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ ऐसे तीन सदिश हैं जिनके लिए $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ तथा $|\vec{c}| = 3$ हैं । यदि सदिश $\vec{b}$ का सदिश $\vec{a}$ पर प्रक्षेप और सदिश $\vec{c}$ का सदिश $\vec{a}$ पर प्रक्षेप एक-दूसरे के बराबर हैं तथा सदिश $\vec{b}$ और $\vec{c}$ लम्बवत् हों, तो $|3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Let $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ be three vectors such that $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ and $|\vec{c}| = 3$. If the projection of $\vec{b}$ along $\vec{a}$ is equal to the projection of $\vec{c}$ along $\vec{a}$; and $\vec{b}$, $\vec{c}$ are perpendicular to each other, then find $|3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|$.

23. वक्र $y = \dfrac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ जहाँ x-अक्ष को काटता है, उस बिन्दु से वक्र पर स्पर्श-रेखा व अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equations of the tangent and normal to the curve $y = \dfrac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ at the point where it cuts the x-axis.

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Questions number 24 to 29 carry 6 marks each.

24. निम्नलिखित फलन के स्थानीय उच्चतम और निम्नतम, यदि कोई हो तो ज्ञात कीजिए तथा स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम मान, जैसी स्थिति हो, भी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Find the local maxima and local minima, if any, of the following function. Also find the local maximum and the local minimum values, as the case may be :

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

25. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ है, तो A^2 ज्ञात कीजिए तथा दिखाइए कि $A^2 = A^{-1}$ है ।

अथवा

आव्यूह विधि से निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$$2x - 3y + 5z = 13$$
$$3x + 2y - 4z = -2$$
$$x + y - 2z = -2$$

If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, find A^2 and show that $A^2 = A^{-1}$.

OR

Using matrix method, solve the following system of equations :

$$2x - 3y + 5z = 13$$
$$3x + 2y - 4z = -2$$
$$x + y - 2z = -2$$

26. दो डिब्बे I और II दिए गए हैं । डिब्बे I में 3 लाल व 6 काली गेंदें हैं । डिब्बे II में 5 लाल व 'n' काली गेंदें हैं । दोनों डिब्बों I और II में से एक डिब्बे को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है । यदि निकाली गई गेंद लाल है और उसके डिब्बे II से आने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ हो, तो 'n' का मान ज्ञात कीजिए ।

There are two boxes I and II. Box I contains 3 red and 6 black balls. Box II contains 5 red and 'n' black balls. One of the two boxes, box I and box II is selected at random and a ball is drawn at random. The ball drawn is found to be red. If the probability that this red ball comes out from box II is $\frac{3}{5}$, find the value of 'n'.

27. बिन्दुओं (2, 5, – 3), (– 2, – 3, 5) और (5, 3, – 3) से गुज़रने वाले समतल के सदिश व कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए । यह समतल, एक रेखा, जो बिन्दुओं (3, 1, 5) तथा (– 1, – 3, – 1) से गुज़रती है, को जिस बिन्दु पर काटता है उसे भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ तथा $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो x-अक्ष के समांतर हो । अत: इस समतल की x-अक्ष से दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector and cartesian equations of the plane passing through the points (2, 5, – 3), (– 2, – 3, 5) and (5, 3, – 3). Also, find the point of intersection of this plane with the line passing through points (3, 1, 5) and (– 1, – 3, – 1).

OR

Find the equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ and parallel to x-axis. Hence, find the distance of the plane from x-axis.

28. समाकलन के प्रयोग से, उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–1, 1), (0, 5) तथा (3, 2) हैं ।

अथवा

समाकलन के प्रयोग से वक्रों $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ तथा $x^2 + y^2 = 1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Find the area of the triangle whose vertices are (–1, 1), (0, 5) and (3, 2), using integration.

OR

Find the area of the region bounded by the curves $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 1$, using integration.

29. एक कंपनी प्लाइवुड के दो प्रकार के अनूठे स्मृति-चिह्न का निर्माण करती है । A प्रकार के प्रति स्मृति-चिह्न के निर्माण में 5 मिनट काटने और 10 मिनट जोड़ने में लगते हैं । B प्रकार के प्रति स्मृति-चिह्न के लिए 8 मिनट काटने और 8 मिनट जोड़ने में लगते हैं । दिया गया है कि काटने के लिए कुल समय 3 घंटे 20 मिनट तथा जोड़ने के लिए 4 घंटे उपलब्ध हैं । प्रत्येक A प्रकार के स्मृति-चिह्न पर ₹ 50 और प्रत्येक B प्रकार के स्मृति-चिह्न पर ₹ 60 का लाभ होना है । ज्ञात कीजिए कि लाभ के अधिकतमीकरण के लिए प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने स्मृति-चिह्नों का कंपनी द्वारा निर्माण होना चाहिए । इस उपर्युक्त समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में परिवर्तित करके आलेख विधि से हल कीजिए तथा अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए ।

A company manufactures two types of novelty souvenirs made of plywood. Souvenirs of type A require 5 minutes each for cutting and 10 minutes each for assembling. Souvenirs of type B require 8 minutes each for cutting and 8 minutes each for assembling. There are 3 hours and 20 minutes available for cutting and 4 hours available for assembling. The profit is ₹ 50 each for type A and ₹ 60 each for type B souvenirs. How many souvenirs of each type should the company manufacture in order to maximize profit ? Formulate the above LPP and solve it graphically and also find the maximum profit.