Roll No.
रोल नं.

Series SHC/2

Code No.
कोड नं. **65/2/1**

- Please check that this question paper contains 11 printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the condidate.
- Please check that this question paper contains 26 questions.
- Please write down the serial number of the question before attempting it.
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 11 हैं।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 26 प्रश्न हैं।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।

MATHEMATICS
गणित

Time allowed : 3 hours — *Maximum Marks: 100*
निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : 100*

General Instuctions :

(ii) *The question paper consists of three sections A,B and C.* ***Section A is compulsory*** *for all students. In addition to Section A, every student has to attempt* ***either Section B OR Section C.***

(ii) ***For Section A***

*Question numbers **1** to **8** are of **3** marks each.*

*Question numbers **9** to **15** are of **4** marks each.*

*Question numbers **16** to **18** are of **6** marks each.*

(iii) ***For Section B / Section C***

*Question numbers **19** to **22** are of **3** marks each.*

*Question numbers **23** to **25** are of **4** marks each.*

*Question number **26** is of **6** marks.*

(iv) *All question are compulsory.*

(v) *Internal choices have been provided in some questions. You have to attempt only one of the choices in such questions.*

(vi) *Use of calculator is not permitted. However, you may ask for logarithmic and statistical table. If required.*

समान्य निर्देश :

(i) *इस प्रश्न पत्र के तीन खण्ड अ, ब और स हैं।* ***खण्ड अ*** *सभी विद्यार्थियों के लिए* ***अनिवार्य*** *हैं। खण्ड अ के अलावा प्रत्येक विद्यार्थी को* ***किसी एक खण्ड - ब या स*** *के प्रश्नों के उत्तर देने हैं।*

(ii) ***खण्ड अ***

प्रश्न संख्या ***1*** *से* ***8*** *तक प्रत्येक के* ***3*** *अंक हैं।*

प्रश्न संख्या ***9*** *से* ***15*** *तक प्रत्येक के* ***4*** *अंक हैं।*

प्रश्न संख्या ***16*** *से* ***18*** *तक प्रत्येक के* ***6*** *अंक हैं।*

(iii) ***खण्ड ब / खण्ड स***

प्रश्न संख्या ***19*** *से* ***22*** *तक प्रत्येक के* ***3*** *अंक हैं।*

प्रश्न संख्या ***23*** *से* ***25*** *तक प्रत्येक के* ***4*** *अंक हैं।*

प्रश्न संख्या ***26, 6*** *अंक का है।*

(iv) *सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।*

(v) *कुछ प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प दिये गये हैं। ऐसे प्रश्नों में केवल एक ही विकल्प को करना है।*

(vi) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है। लेकिन यदि आवश्यकता हो तो आप लघुगणकीय व सांख्यिकीय सारणियों की माँग कर सकते हैं।*

SECTION A

खण्ड अ

1. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, show that $A^2 - 4A + I = 0$. Hence find A^{-1}.

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के लिए, दिखाइए कि $A^2 - 4A + I = 0$. अतः A^{-1} ज्ञात कीजिए।

2. Using the properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

3. Solve the following differential equation :

$$(1+y^2)\,(1+\log x)\,dx + x\,dy = 0$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(1+y^2)\,(1+\log x)\,dx + x\,dy = 0$$

4. Form the differential equation of the family of curves $y = A\,e^{Bx}$, where A and B are constants.

OR

Solve the following differential equation :

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{2}{(x^2-1)}$$

वक्र कुल $y = A\,e^{Bx}$, जहाँ A तथा B अचर हैं, के लिए एक अवकल समीकरण बनाइए।

अथवा

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{2}{(x^2-1)}$$

5. Evaluate :

$$\int \sin 3x \,\sin 5x \,dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \sin 3x \,\sin 5x \,dx$$

6. Evaluate :

$$\int \frac{e^x.(2+\sin 2x)}{2\cos^2 x}\,dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{e^x.(2+\sin 2x)}{2\cos^2 x}\,dx$$

7. A card is drawn at random from a well-shuffled pack of 52 cards. Find the probability that it is neither a king nor a heart.

अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की ताश की एक गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि न तो वह बादशाह (king) है और न ही पान (heart) का पत्ता है।

8. An urn contains 6 red and 5 blue balls. Two balls are drawn at random with replacement. Find the probability of getting

(i) 2 red balls

(ii) 2 blue balls

(iii) one red and one blue ball

एक पात्र में 6 लाल तथा 5 नीली गेंदें हैं। पात्र में से दो गेंदें यादृच्छया प्रतिस्थापना सहित निकाली जाती हैं। निम्न के आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) 2 लाल गेंदें

(ii) 2 नीली गेंदें

(iii) एक लाल तथा एक नीली गेंद

9. Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

10. Evaluate :

$$\int \frac{2x-3}{x^2+3x-18}\,dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2x-3}{x^2+3x-18}\,dx$$

11. Find the value of k for which the function

$$f(x) = \begin{cases} kx+5, & \text{if } x \le 2 \\ x-1, & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

is continuous at x = 2.

OR

Evaluate :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin^{-1} x} \right)$$

k का मान ज्ञात कीजिए यदि फलन

$$f(x) = \begin{cases} kx + 5, & \text{यदि } x \le 2 \\ x - 1, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

x = 2 पर सतत है।

अथवा

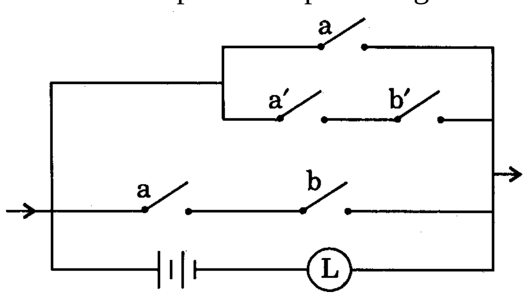
मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin^{-1} x} \right)$$

12. Find the derivative of $\cos(2x+1)$ w.r.t. x from first principle.

$\cos(2x+1)$ का x के सापेक्ष आदितः अवकलन कीजिए।

13. Find the Boolean expression representing the following switching circuit :



Simplify the expression so obtained.

OR

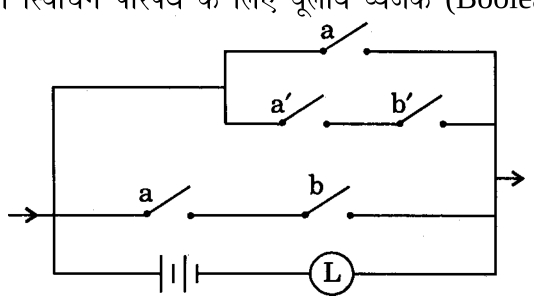
Examine the validity of the following argument :

$S_1 : p \to q$

$S_2 : \sim p$

$S : \sim q$

निम्न स्विचिंग परिपथ के लिए बूलीय व्यंजक (Boolean expression) ज्ञात कीजिए :



प्राप्त व्यंजक को सरल कीजिए।

अथवा

निम्न युक्ति की वैधता का परीक्षण कीजिए :

$S_1 : p \to q$

$S_2 : \sim p$

$S : \sim q$

14. If $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, prove that

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

15. Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 - 5x + 6$ on [2, 3].

फलन $f(x) = x^2 - 5x + 6$ के लिए अन्तराल [2, 3] पर रोले के प्रमेय की सत्यता की जाँच कीजिए।

16. Using matrices, solve the following system of equations :

$$2x - y + z = -3$$
$$3x - z = -8$$
$$x + 3y = 1$$

आव्यूहों का प्रयोग करके, निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$2x - y + z = -3$$
$$3x - z = -8$$
$$x + 3y = 1$$

17. Using integration calculate the area of the region bounded by the two parabolas $y = x^2$ and $x = y^2$.

OR

Evaluate $\int_0^2 (2x^2 + x + 5)\, dx$ as limit of a sum.

समाकलों का प्रयोग करके दो परवलयों $y = x^2$ तथा $x = y^2$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

योगों की गुच्छ मान विधि द्वारा $\int_0^2 (2x^2 + x + 5)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

18. Find the point on the curve $y^2 = 4x$ which is nearest to the point (2, 1).

OR

Show that a right-circular cylinder of given volume, open at the top, has minimum total surface area, provided its height is equal to the radius of the base.

वक्र $y^2 = 4x$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, 1) से न्यूनतम दूरी पर हो।

अथवा

दिखाइए कि एक दिए गए आयतन वाला लम्बवृत्तीय बेलन, जो ऊपर से खुला है, का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होगा यदि उसकी ऊँचाई उसके आधार पर त्रिज्या के बराबर हो।

SECTION B
खण्ड ब

19. Find the projection of $\vec{b}+\vec{c}$ on $\vec{a}$ where $\vec{a} = 7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{j} + 4\hat{k}$.

सदिश $\vec{b}+\vec{c}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = 7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{j} + 4\hat{k}$.

20. Find the value of λ, which makes the vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ coplanar, where $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{c} = 4\hat{i} - 7\hat{j} + 10\hat{k}$.

λ का मान ज्ञात कीजिए जो सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ को समतलीय बनाए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 4\hat{i} - 7\hat{j} + 10\hat{k}$.

21. A particle starting with initial velocity of 26 m/sec moves with a uniform acceleration of 6m/sec^2. Find

(i) the velocity of the particle after 7 seconds.

(ii) how far it will go in 6 seconds.

(iii) its velocity when is has traversed 100 m.

एक कण प्रारम्भिक वेग 26 मी./से. तथा एकसमान त्वरण 6 मी./से.^{2} से चलना प्रारम्भ करता है। निम्न ज्ञात कीजिए :

(i) 7 सेकण्ड बाद कण का वेग।

(ii) 6 सेकण्ड में कण कितनी दूरी तय करेगा।

(iii) 100 मी. दूरी तय करने पर उसका वेग।

22. Find the resultant of two velocities 6 km/hr and $6\sqrt{2}$ km/hr inclined to one another at an angle of 135°.

OR

A particle is projected with a velocity of 39.2 m/sec at an elevation of 30°. Find

(i) the time of flight.

(ii) the greatest height.

6 किमी/घं. तथा $6\sqrt{2}$ किमी/घं. के दो वेग, जो एक-दूसरे से 135° के कोण पर कार्यरत हैं, के परिणामी का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

39.2 मी./से. के वेग से एक कण 30° के उन्नयन कोण पर प्रक्षिप्त किया गया। ज्ञात कीजिए

(i) उड़ान का समय।

(ii) अधिकतम ऊँचाई।

23. A body of mass 50 kg, suspended by two strings of lengths 30 cm and 40 cm fastend to two points in the same horizontal line 50 cm apart, is in equilibrium. Find the tension (in Newtons) in each string.

50 किग्रा द्रव्यमान का एक पिंड, किसी क्षैतिज रेखा में परस्पर 50 सेमी दूर स्थित दो बिन्दुओं से क्रमशः 30 सेमी तथा 40 सेमी लम्बी डोरियों से बंधा हुआ, संतुलित अवस्था में लटक रहा है। प्रत्येक डोरी में तनाव (न्यूटन में) ज्ञात कीजिए।

24. Two forces act at a point and are such that if the direction of one is reversed, the resultant is turned through a right angle. Show that the two forces must be equal in magnitude.

दो बल एक बिन्दु पर कार्यरत हैं और इस प्रकार से हैं कि यदि उनमें से एक की दिशा विपरीत कर दी जाए, तो परिणामी बल एक समकोण घूम जाता है। दर्शाइए कि दिए हुए दोनों बल परिमाण में समान हैं।

25. Find the equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6,\ \vec{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$ and the point (1, 1, 1).

उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो तलों $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6,\ \vec{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$ के प्रतिच्छेदन से तथा बिन्दु (1, 1, 1) से होकर जाता है।

26. Find the equation of the sphere which passing through the points (0, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 2, 0) and (1, 2, 3).

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 2, 0) तथा (1, 2, 3) से होकर जाता है।

SECTION C
खण्ड स

19. Calculate the banker's gain on a bill of Rs. 36,000 due in 5 months at 5% per annum.

36,000 रु. के बिल पर, जो 5 महीने में देय है तथा जिस पर ब्याज 5% वार्षिक की दर से है, बैंकर का लाभ ज्ञात कीजिए।

20. A bill of exchange drawn on February 4, 2001 at 4 months after date was discounted on March 26, 2001 at 8% per annum. If the banker's discount is Rs. 400, find the face value of the bill.

एक विनिमय बिल 4 फरवरी, 2001 को 4 महीने के लिए लिखा गया तथा 26 मार्च, 2001 को भुना लिया गया। यदि ब्याज की दर 8% वार्षिक है तथा बैंकर बट्टा 400 रु. है, तो बिल का अंकित-मूल्य (face value) ज्ञात कीजिए।

21. There are two bags I and II. Bag I contains 3 white and 3 red balls and Bag II contains 4 white and 5 red balls. One ball is drawn at random from one of the bags and is found to be red. Find the probability that it was drawn from bag II.

दो थैले I तथा II हैं। थैले I में 3 सफेद तथा 3 लाल गेंदें हैं और थैले II में 4 सफेद तथा 5 लाल गेंदें हैं। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई जिसे लाल रंग का पाया गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद थैले II में से थी।

22. Find the mean μ, variance σ^2 for the following probability distribution :

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$

OR

If the mean and variance of a binomial distribution are respectively 9 and 6, find the distribution.

निम्न प्रायिकता बंटन के लिए माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 ज्ञात कीजिए :

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$

अथवा

यदि किसी द्विपद बंटन के माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 9 तथा 6 हैं, तो बंटन ज्ञात कीजिए।

23. A, B and C entered into a partnership investing Rs. 12,000 for 4 months, Rs. 14,000 for 8 months and Rs. 10,000 for 10 months respectively. Find the share of each in a profit of Rs. 5,850 if the profit is distributed in the ratio of investments.

A, B तथा C ने क्रमशः 12,000 रु. 4 महीने के लिए, 14,000 रु. 8 महीने के लिए तथा 10,000 रु. 10 महीने के लिए निवेश कर व्यापार आरम्भ किया। 5,850 रु. के लाभ में प्रत्येक का भाग ज्ञात कीजिए यदि लाभ निवेश के अनुपात में बाँटा जाता है।

24. Find the present value of an annuity due of Rs. 900 per annum payable at the beginning of each year for 2 years allowing interest 6% per annum, compounded annually.
[Take $(1.06)^{-1} = 0.943$]

2 वर्षों के लिए 900 रु. प्रति वर्ष भुगतान वाली देय वार्षिकी जो प्रति वर्ष के आरम्भ में दी जाती है का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 6% वार्षिक की दर से वार्षिक संयोजित होता है।
[Take $(1.06)^{-1} = 0.943$]

25. Given the total cost function for x units of a commidity as

$$C(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 16.$$

Find

(i) the average cost function.

(ii) the average cost of output of 10 units.

(iii) the marginal cost function

(iv) the marginal cost when 5 units are produced.

दिया गया है किसी वस्तु की x उत्पाद संख्या के लिए कुल लागत फलन $C(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 16.$

ज्ञात कीजिए :

(i) औसत लागत फलन।

(ii) 10 इकाइयों के उत्पादन के लिए औसत लागत।

(iii) सीमांत लागत फलन।

(iv) 5 उत्पाद संख्या के लिए सीमांत लागत।

26. Two tailors A and B earn Rs. 150 and Rs. 200 per day respectively. A can stitch 6 shirts and 4 pants while B can stitch 10 shirts and 4 pants per day. Form a linear programming problem to minimise the labour cost to produce at least 60 shirts and 32 pants and solve it graphically.

दो दर्जी A तथा B प्रतिदिन क्रमशः 150 रु. तथा 200 रु. कमाते हैं। A प्रतिदिन 6 कमीज़े तथा 4 पैंट सिल सकता है जबकि B प्रतिदिन 10 कमीज़े तथा 4 पैंट सिल सकता है। न्यूनतम 60 कमीज़ों और 32 पैंटों को बनाने के लिए श्रम लागत के न्यूनीकरण के लिए रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर उसे ग्राफ की सहायता से हल कीजिए।