

# MATHEMATICS

गणित  
(311)

Time : 3 Hours ]

[ Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे ]

[ पूर्णांक : 100

- Note : (i) This Question Paper consists of *two* Sections, viz., 'A' and 'B'.  
(ii) *All* questions from Section 'A' are to be attempted. However, in some questions, internal choice is given.  
(iii) Section 'B' has *two* options. Candidates are required to attempt questions from *one option* only.

- निर्देश : (i) इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड हैं—खण्ड 'अ' तथा खण्ड 'ब'।  
(ii) खण्ड 'अ' के सभी प्रश्नों को हल करना है। कुछ प्रश्नों के अन्तर्गत विकल्प दिए गए हैं।  
(iii) खण्ड 'ब' में दो विकल्प हैं। परीक्षार्थियों को केवल एक विकल्प के ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

## SECTION-A

खण्ड-अ

1. Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin 3A}{\cos 3A} = \tan 2A \quad 2$$

2. If  $f(x) = x^2 - 4$  and  $g(x) = 2x - 5$ , find  $f \circ g$  and  $g \circ f$ . 2

यदि  $f(x) = x^2 - 4$  तथा  $g(x) = 2x - 5$  है, तो  $f \circ g$  तथा  $g \circ f$  ज्ञात कीजिए।

3. If  $A = \{2, 3, 5, 6\}$  and  $B = \{1, 4, 5, 10\}$ , find  $(A \setminus B)$  and  $(B \setminus A)$ . 2

यदि  $A = \{2, 3, 5, 6\}$  तथा  $B = \{1, 4, 5, 10\}$ , तो  $(A \setminus B)$  तथा  $(B \setminus A)$  ज्ञात कीजिए।

4. Express the complex number  $\frac{3-4i}{1-3i}$  in the form of  $a+ib$ .

सम्मिश्र संख्या  $\frac{3-4i}{1-3i}$  को  $a+ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

5. If one root of the equation  $ax^2+bx+c=0$ ,  $a \neq 0$  is the square of the other, prove that  $b^3+ac^2+a^2c=3abc$ .

यदि समीकरण  $ax^2+bx+c=0$ ,  $a \neq 0$  का एक मूल दूसरे मूल का वर्ग है, तो सिद्ध कीजिए कि  $b^3+ac^2+a^2c=3abc$ .

6. If 7 times the 7th term of an AP is equal to 11 times its 11th term, find the 18th term of the AP.

यदि एक समान्तर श्रेणी के 7वें पद का 7 गुना, उसके 11वें पद के 11 गुने के बराबर है, तो उस समान्तर श्रेणी का 18वाँ पद ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the 10th term from the end of the AP 7, 11, 15, ..., 123.

समान्तर श्रेणी 7, 11, 15, ..., 123 के अन्त से 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

7. If  $1, \omega, \omega^2$  are cube roots of unity, then prove the following :

यदि  $1, \omega, \omega^2$  एक के घनमूल हैं, तो निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$(1-\omega^2)^2 + (1-\omega)^2 = 4$$

8. Find the equation of a line passing through the point  $(-4, -3)$  and parallel to the line  $3x-5y+11=0$ .

बिन्दु  $(-4, -3)$  से होकर जाने वाली तथा रेखा  $3x-5y+11=0$  के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. Find the mean and variance of the following data :

निम्न आँकड़ों के लिए माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए :

$x_i$	:	2	4	6	8	10	12	14	16
$f_i$	:	4	4	5	15	8	5	4	5

Or / अथवा

If  $x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x} = 0$ , prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

यदि  $x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x} = 0$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

10. How many numbers lying between 10 and 1000 can be formed with the digits 3, 4, 5 and 7?

अंकों 3, 4, 5 तथा 7 का प्रयोग करके 10 तथा 1000 के बीच वाली कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

Or / अथवा

Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$${}^n C_r + {}^n C_{r-1} + \dots + {}^n C_1$$

11. Solve the following differential equation :

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = y + 4x$$

Or / अथवा

Find the equation of the straight line passing through the points (0, a) and (b, 0).

उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, a) तथा (b, 0) से होकर जाती है।

12. Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x^2}{x^2 - a^2} dx$$

Or / अथवा

Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan x} dx$$

13. Find the 10th term in the expansion of  $2x^2 + \frac{1}{x}^{12}$ .

$2x^2 + \frac{1}{x}^{12}$  के प्रसार में 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

14. Find the equation of the circle passing through the points (0, 2), (3, 0) and (3, 2).

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, 2), (3, 0) तथा (3, 2) से होकर जाता है।

15. Find the differential equation of all the circles in the 1st quadrant, touching the coordinate axes.

प्रथम चतुर्थांश के उन सभी वृत्तों का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करते हैं।

16. Find the intervals in which the following function is (a) increasing and (b) decreasing :

निम्न फलन के लिए वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन (क) वर्धमान तथा (ख) हासमान है :

$$f(x) = 2x^3 - 24x + 107$$

Find the equation of tangent to the curve  $y = \sqrt{5x - 3} - 2$  which is parallel to  $4x - 2y - 3 = 0$ .

वक्र  $y = \sqrt{5x - 3} - 2$  पर उस स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो  $4x - 2y - 3 = 0$  के समान्तर है।

17. A bag contains 6 red, 4 white and 8 blue balls. If 3 balls are drawn at random from the bag, find the probability that the balls are of different colours. 4

एक थैले में 6 लाल, 4 सफेद तथा 8 नीली गेंदें हैं। यदि थैले में से 3 गेंदें यादृच्छया निकाले जाते हैं, तो उनके अलग-अलग रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

18. Solve the following linear programming problem graphically : 4

$$\text{Minimize } Z = x + 2y$$

subject to the following constraints

$$x + y = 1$$

$$2x + 4y = 3$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$$\text{न्यूनतमीकरण कीजिए } Z = x + 2y$$

निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत

$$x + y = 1$$

$$2x + 4y = 3$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

19. Evaluate : 4

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{4x + \sin 5x}$$

Or / अथवा

If  $y = \tan^{-1} \frac{\cos x \sin x}{\cos x \sin x}$ , find  $\frac{dy}{dx}$ .

यदि  $y = \tan^{-1} \frac{\cos x \sin x}{\cos x \sin x}$  है, तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए।

20. Determine two positive numbers whose sum is 15 and sum of whose squares is minimum.

वह दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है तथा जिनके वर्गों का योग न्यूनतम है।

21. Find the sum of the following series :

निम्न अनुक्रम का योग ज्ञात कीजिए :

1.2.3 2.3.4 3.4.5 ... up to  $n$  terms ( $n$  पदों तक)

22. Evaluate  $\int_1^3 (x^2 - 3) dx$  as limit of sum.

$\int_1^3 (x^2 - 3) dx$  का मान योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the area of the region bounded above by the line  $y = x + 6$ , bounded below by  $y = x^2$  and bounded on the sides by the lines  $x = 0$  and  $x = 2$ .

$y = x + 6$  द्वारा ऊपर से,  $y = x^2$  द्वारा नीचे से तथा आसपास से रेखाओं  $x = 0$  तथा  $x = 2$  द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

23. In any triangle  $ABC$ , show that

$$a \sin A = b \sin B = c \sin (A + B)$$

किसी त्रिभुज  $ABC$  में दर्शाइए कि

$$a \sin A = b \sin B = c \sin (A + B)$$

24. Show that  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  satisfies the equation  $A^3 - A^2 - 3A + I_3 = 0$ .

दर्शाएँ कि  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  समीकरण  $A^3 - A^2 - 3A + I_3 = 0$  को सन्तुष्ट करता है।

*Or / अथवा*

Using the properties of determinants, prove the following :

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x & a & x & x \\ x & x & a & x \\ x & x & x & a \end{vmatrix} = a^2(3x - a)$$

**SECTION-B**

खण्ड-ब

OPTION-I

विकल्प-I

**( Vectors and Three-dimensional Geometry )**

( सदिश तथा त्रि-आयाम ज्यामिति )

25. Find the equation of the plane passing through the points  $P(1, 2, 4)$  and  $Q(4, 0, 6)$  and perpendicular to the plane  $x + 2y + z = 5$ .

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं  $P(1, 2, 4)$  तथा  $Q(4, 0, 6)$  से होकर जाता है तथा समतल  $x + 2y + z = 5$  पर लम्बवत् है।

Or / अथवा

Find the coordinates of the point, where the line  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$  meets the plane  $x + y + 4z = 6$ .

उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ रेखा  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$  समतल  $x + y + 4z = 6$  से मिलती है।

26. The equation of a sphere is  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$  and one end of a diameter is  $(2, 3, 3 + \sqrt{14})$ . Find the coordinates of the other end of the diameter.

एक गोले का समीकरण  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$  तथा उसके एक व्यास के एक सिरे के निर्देशांक  $(2, 3, 3 + \sqrt{14})$  हैं। उस व्यास के दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

27. Find a unit vector in the direction of  $\vec{a} + \vec{b}$ , where  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  and  $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ .

$\vec{a} + \vec{b}$  की दिशा में एक एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  है तथा  $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$  है।

28. If  $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$  and  $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ , find  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  and also find the angle between  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$ .

यदि  $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$  तथा  $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ , तो  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ज्ञात कीजिए तथा  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  के बीच का कोण भी ज्ञात कीजिए।

### OPTION-II

#### विकल्प-II

#### ( Mathematics for Commerce, Economics and Business )

#### ( वाणिज्य, अर्थशास्त्र तथा व्यवसाय के लिए गणित )

25. Mohan invested a part of Rs 15,000 in 5% stock at 90 and the remaining in 7% stock at 120. If his total income from both the stocks is Rs 855, find the respective investments in different stocks.

मोहन ने 15,000 रु० का एक भाग 5% के 90 वाले स्टॉक में तथा शेष 7% पर 120 वाले स्टॉक में लगाए। यदि दोनों स्टॉक से कुल आय 855 रु० हुई, तो दोनों स्टॉकों में क्रमशः निवेश ज्ञात कीजिए।

26. A person at the age of 25 years takes an insurance policy of sum assured Rs 75,000 for 30 years term. Calculate the premium for annual payment assuming the following :

Tabular premium per Rs 1,000—Rs 40

Rebate for large sum assured—Rs 2 per Rs 1,000

Rebate for annual payment—3%

25 वर्ष की आयु में एक व्यक्ति ने 75,000 रु० की बीमा पॉलिसी 30 वर्ष के लिए ली। इस पॉलिसी के लिए वार्षिक बीमा की गणना निम्न शर्तों पर कीजिए :

सारणीगत प्रीमियम प्रति 1,000 रु०—40 रु०

बड़ी राशि की पॉलिसी पर छूट—2 रु० प्रति 1,000 रु०

वार्षिक भुगतान पर छूट—3%

Or / अथवा

Mr. Prasad imports 700 kg of sugar per day @ Rs 20 per kg. Customs duty on sugar is 20%. How much customs duty he has to pay in a month, if 2% education cess is to be charged on customs duty?

श्री प्रसाद 700 कि० ग्रा० चीनी प्रतिदिन 20 रु० प्रति कि० ग्रा० के भाव से आयात करते हैं। चीनी पर सीमा शुल्क 20% है। उनको एक माह में कितना सीमा शुल्क देना होगा, यदि सीमा शुल्क पर शिक्षा प्रभार 2% है?

27. The cost function of a firm is given by  $C = 2x^2 - x + 5$ . Find the (a) average cost and (b) marginal cost, when  $x = 4$ . 2

एक फर्म का लागत फलन  $C = 2x^2 - x + 5$  द्वारा प्रदत्त है।  $x = 4$  पर फर्म की (क) औसत लागत तथा (ख) सीमान्त लागत ज्ञात कीजिए।

28. The marginal cost function of manufacturing  $x$  units of a product is  $5 + 16x - 3x^2$ . If the total cost of producing 5 items is Rs 500, find the total cost function. 3

एक माल की  $x$  इकाइयों के उत्पादन का सीमांत लागत फलन  $5 + 16x - 3x^2$  है। यदि 5 इकाइयों की कुल उत्पादन लागत 500 रु० है, तो कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए।

★ ★ ★