53512 Seat No.________

First Year B. Sc. Examination

April / May – 2003

Mathematics : Paper – II

Time : Hours] [Total Marks :

સૂચના : (૧) બધા જ પ્રશ્નોનાં જવાબ આપો.
(૨) દરેક પ્રશ્નના ગુણ **સમાન** છે.

૧ (અ) વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ V ની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશનો શૂન્ય સદિશ અનન્ય હોય છે.

(બ) વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ V માં સાબિત કરો :

(૧) $\alpha x = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ અથવા $x = \overline{0}$, જ્યાં $\overline{0}$ એ V નો શૂન્ય સદિશ છે અને $x \in V$

(૨) $\alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta$, $\forall\, \alpha, \beta \in R$ જ્યાં $x \in V \sim \{\overline{0}\}$.

(ક) જો $A = \{(1,0,1), (1,1,2)\}$ હોય તો $[A]$ મેળવો. તેમ જ બતાવો કે $(1,-1,0) \in [A]$.

અથવા

૧ (અ) વાસ્તવિક સદિશ અવકાશના ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. જો વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ V ના અરિક્ત ઉપગણ A માટે $\forall\, x, y \in A, \forall\; \alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A$ તો બતાવો કે A એ V નું ઉપાવકાશ છે.

(બ) બતાવો કે $W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = x + 2y\}$ એ સદિશ અવકાશ R^3નું ઉપાવકાશ છે.

(ક) V કોઈ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે અને $x \in V$ સાબિત કરો કે $x + x = x \Leftrightarrow x = \overline{0}$

૨ (અ) સદિશોની સુરેખ સ્વાયત્તતા વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે જો $A = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ એ કોઈ સદિશ અવકાશ V નો સુરેખ સ્વાયત્ત ઉપગણ હોય અને કોઈ $x \in V$ માટે $x \notin [A]$, તો $A \cup [x]$ પણ Vનો સુરેખ સ્વાયત્ત સદિશગણ છે.

અથવા

(અ) સાંત પરિમાણીય સદિશ અવકાશના આધાર અને પરિમાણની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે n–પરિમાણીય સદિશ અવકાશ Vના n–સદિશોનો પ્રત્યેક સુરેખ સ્વાયત્ત ગણ એ સદિશ અવકાશનો આધાર છે.

(બ) ગમે તે **બે**ના જવાબ લખો :

(૧) સદિશગણ $\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$ની સુરેખ સ્વાયત્તતા ચકાસો.

(૨) સદિશગણ $\{(1,1,0)\}$ ને સદિશ અવકાશ R^3 ના આધાર તરીકે વિસ્તારો.

(૩) સદિશ અવકાશ R^3 ના સદિશ $(3,4,5)$ના યામ ક્રમયુક્ત આધાર $B=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ની સાપેક્ષે મેળવો.

૩ (અ) સુરેખ પરિવર્તનની વ્યાખ્યા આપો. જો $T:U\to V$ સુરેખ પરિવર્તન હોય તો સાબિત કરો કે :

$$T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+......+\alpha_n x_n)=\alpha_1 T(x_1)+\alpha_2 T(x_2)+......+\alpha_n T(x_n)$$

જ્યાં $x_1, x_2, ...x_n \in U$ અને $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ અદિશો છે.

અથવા

(અ) U અને V માટે $U=\dim V$ હોય તેવા સાંત પરિમાણીય સદિશ અવકાશ છે અને $T:U\to V$ સુરેખ પરિવર્તન છે. સાબિત કરો કે T એક–એક $\Leftrightarrow$ T વ્યાપ્ત છે.

(બ) ગમે તે **બે**ના જવાબ આપો :

(૧) સુરેખ પરિવર્તન $T:R^3\to R^2$

$T(x,y,z)=(x+y,y+z)$, $\forall (x,y,z)\in R^3$

માટે કોટ્યાંક–શૂન્યાંક પ્રમેય ચકાસો.

(૨) બતાવો કે સુરેખ પરિવર્તન $T:R^2\to R^2$

$T(x,y)=(x+y,x-y), \forall (x,y)\in R^2$

એ એક–એક અને વ્યાપ્ત સુરેખ પરિવર્તન છે. T^{-1} પણ શોધો.

(૩) જો સુરેખ પરિવર્તન $T:R^3\to R^2$ એ

$T(x,y,z)=(x+y+z,x-y-z), \forall (x,y,z)\in R^3$

તથા સુરેખ પરિવર્તન $S:R^2\to R^2$ એ $S(x,y)=(2y,x)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય, તો SOT મેળવો. શું TOSનું અસ્તિત્વ છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન આપો.

૪ (અ) સુરેખ પરિવર્તન સાથે સંકળાયેલ શ્રેણિક એટલે શું તે સમજાવો. જો $T:R^2\to R^2$ $T(x,y)=(-x,y)$ સુરેખ પરિવર્તન હોય તો

શ્રેણિક $[T:B_1, B_2]$ મેળવો જ્યાં $B_1=\{(1,1),(1,0)\}$

$B_2=\{(2,3),(4,5)\}$

અથવા

(અ) વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ R^4 અને R^3ના પ્રમાણિત આધારો લઈને શ્રેણિક

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ સાથે સંકળાયેલ સુરેખ પરિવર્તન મેળવો.

(બ) સાબિત કરો કે લંબાતિવલયની પરસ્પર લંબ નાભિજીવાઓ સમાન હોય છે.

અથવા

(બ) કેન્દ્રના ધ્રુવીય યામ (ρ, α) અને ત્રિજ્યા a હોય તેવા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો તથા વર્તુળ $r^2 - r(\cos\theta + \sin\theta) - \frac{1}{2} = 0$નું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા મેળવો.

(ક) બિંદુઓ $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ અને $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકનું સમીકરણ મેળવો.

૫ (અ) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ પરના (α, β, γ) બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(બ) જો $x - y + z = k$ સમતલ, $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - z = 0$ ગોલકને સ્પર્શે તો k ની કિંમત શોધો.

(ક) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 70 = 0, x + 5y - 7z = 45$ વર્તુળનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

અથવા

૫ (અ) સાબિત કરો કે સમતલ $2x + 2y - z + 7 = 0$ એ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8z + 16 = 0$ સ્પર્શે છે.

(બ) બે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$ લંબચ્છેદી અને તે માટેની શરત મેળવો.

(ક) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 7 = 0$ ને સાપેક્ષ, આપેલ બિંદુઓ $(3, 2, -1), (0, 4, 1)$ અને $(0, 7, 2)$નાં સ્થાન નક્કી કરો.

૬ (અ) શંકુનું શિરોબિંદુ ઉદ્‌ગમબિંદુ હોય તો સાબિત કરો કે શંકુનું સમીકરણ સમપરિમાણ છે.

(બ) Z–અક્ષને સમાંતર અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ ને સ્પર્શતી સર્જકરેખાથી રચાતા પરિસ્પર્શી નળાકારનું સમીકરણ શોધો.

(ક) $(0,0,0)$ શિરોબિંદુ, θ અર્ધશિરોકોણ અને $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ દિશાવાળી રેખા અક્ષ હોય એવા સમશંકુનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

૬ (અ) જેનું શીર્ષ $V(\alpha, \beta, \gamma)$, અક્ષ $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ અને અર્ધશિરોકોણ θ હોય તેના સમશંકુનું સમીકરણ મેળવો.

(બ) જેનો અક્ષ $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$ હોય અને નિર્દેશક વક્ર $2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$ હોય તેવા નળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(ક) સાબિત કરો કે $xy + yz + zx = 0$ સમીકરણ સમશંકુ દર્શાવે છે. તેનો અક્ષ તેમજ અર્ધશિરોકોણ શોધો.

૭ (અ) સમતલ $lx + my + nz = p$ $(p \neq 0)$ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ને સ્પર્શે તે માટેની શરત અને સ્પર્શ બિંદુના યામ મેળવો.

અથવા

(અ) પરવલયજ $ax^2 + by^2 = 2z$ પરના બિંદુ $P(\alpha, \beta, \gamma)$ આગળના સ્પર્શતલનું સમીકરણ $a\alpha x + b\beta y = z + \gamma$ છે તેમ સાબિત કરો.

(બ) ઉપવલયજ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ નું સ્પર્શતલ યામાક્ષોને A, B અને C બિંદુઓમાં છેદે છે તો સાબિત કરો કે ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રનો પથ $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$ છે.

અથવા

(અ) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{20} = \frac{z-10}{21}$ સુરેખાને લંબ અને $4x^2 - 5y^2 + 7z^2 + 13 = 0$ શાંકવજને સ્પર્શતા સમતલોનાં સમીકરણ મેળવો અને સ્પર્શબિંદુઓ શોધો.

(ક) કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ પરના બિંદુ $p(\alpha, \beta, \gamma)$ આગળનો શાંકવજનો અભિલંબ સમતલો $x = 0, y = 0$ અને $z = 0$ ને અનુક્રમે G_1, G_2 અને G_3 માં છેદે છે. તો સાબિત કરો $a \cdot pG_1 = b \cdot pG_2 = c \cdot pG_3$.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) Attempt **all** questions

(2) Each question carries **equal** marks.

1 (a) Define a real vector space. Prove that the zero vector of a vector space is unique.

(b) V is a real vector space. Prove that :

(1) $\alpha x = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ or $x = \overline{0}$, where $\overline{0}$ is the zero vector of V and $x \in V$.

(2) $\alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta$, $\forall\ \alpha, \beta \in R$ where $x \in V \sim \{\overline{0}\}$.

(c) If $A = \{(1,0,1), (1,1,2)\}$, find $[A]$ and show that $(1,-1,0) \in [A]$

OR

1 (a) Define a subspace of a real vector space. If for a nonempty subset A of a real vector space V, $\forall\ x, y \in A, \forall\ \alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A$ then prove that A is a subspace of V.

(b) Show that $W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = x + 2y\}$ is a subspace of the vector space R^3.

(c) V is a real vector space and $x \in V$. Prove that $x + x = x \Leftrightarrow x = \overline{0}$.

2 (a) Define linear independence of the vectors. If $A = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ is a linearly independent subset of a vector space V and if $x \in V$ is such that $x \notin [A]$, then prove that $A \cup [x]$ also is a linearly independent subset V.

OR

(a) Define a basis and the dimension of a finite dimensional vector space. Prove that the set of any n linearly independent vectors of an n–dimensional vector space V is a basis for V.

(b) Attempt any **two** :

(1) Check linear independence of the vector set $\{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}$

(2) Extend the vector set $\{(1,1,0)\}$ as a basis for the vector space R^3.

(3) Find the co–ordinates of the vector $(3,4,5)$ of the vector space R^3 relative to the ordered basis $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

3 (a) Define a linear transformation. If $T : U \to V$ is a linear transformation, prove :

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + ... + \alpha_n T(x_n)$$

where $x_1, x_2, ... x_n \in U$ and $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ are scalars.

OR

(a) U and V are finite dimensional vector space satisfying $dim\ U = \dim V$ and $T : U \to V$ is a linear transformation. Prove that T is one–one $\Leftrightarrow$ T is onto.

(b) Attempt any **two** :

(1) Verify the rank–nullity theorem for the linear transformation $T : R^3 \to R^2$ defined as $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$, $\forall\ (x, y, z) \in R^3$.

(2) Show that the linear transformation $T : R^3 \to R^2$ $T(x, y) = (x + y, x - y), \forall\ (x, y) \in R^2$ is a one–one and onto linear transformation. Also find T^{-1}.

(3) If $T : R^3 \to R^2$,

$T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z), \forall\ (x, y, z) \in R^3$

and $S : R^2 \to R^2$ $S(x, y) = (2y, x)$, $\forall (x, y) \in R^2$ are linear transformations then find SOT. Does TOS exist ? Justify your answer.

4 (a) Explain the meaning of the matrix associated with a linear map . If $T : R^2 \to R^2$ $T(x, y) = (-x, y)$ is a linear transformation then find the matrix $[T : B_1, B_2]$ where $B_1 = \{(1, 1), (1, 0)\}$ $B_2 = \{(2, 3), (4, 5)\}$

OR

(a) Considering the standard bases for the real vector space R^4 and R^3, obtain the linearmap associated with the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Prove that the length of perpendicular focal chords of rectangular hyperbola are equal.

OR

(b) Find a polar equation of a circle with centre (ρ, α) and radius a. Also find the centre and radius of circle $r^2 - r(\cos\theta + \sin\theta) - \frac{1}{2} = 0$

(c) Find the polar equation of the line bisecting the line segment joining the points $\left(2, \pi/6\right)$ and $\left(4, \pi/6\right)$.

5 (a) Find the equation of the tangent plane at the point (α, β, γ) on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$.

(b) Find the value of k if the plane $x - y + z = k$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - z = 0$.

(c) Find the centre and radius of the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 70 = 0$, $x + 5y - 7z = 45$.

OR

5 (a) Prove that the plane $2x + 2y - z + 7 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8z + 16 = 0$·

(b) Obtain the condition that the spheres

$x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$ and

$x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$ are orthogonal.

(c) Determine the location of the points $(3, 2, -1)$ $(0, 4, 1)$ and $(0, 7, 2)$ with respect to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 7 = 0$·

6 (a) Prove that the equation of a cone with vertex at origin is homogeneous.

(b) Find the equation of an enveloping cylinder where generation line is parallel to Z–axis and touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

(c) Obtain the equation of the right circular cone whose vertex is $(0, 0, 0)$ semi vertical angle is θ and the direction of the axis is $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

OR

6 (a) Obtain the equation of the right circular cone whose vertex is $V(\alpha, \beta, \gamma)$ semi vertical angle is θ and the axis is $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$.

(b) Find the equation of the cylinder whose axis is $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$ and whose guiding curve is $2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$

(c) Prove that the equation $xy + yz + zx = 0$ represents a right cone. Obtain its axis and semi vertical angle.

7 (a) Find condition and a point of contact for a plane $lx + my + nz = p \;\; (p \neq 0)$ to touch a conic $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

OR

(a) Prove that the equation of tangent plane at point (α, β, γ) on the paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ is $a\,\alpha\, x + b\,\beta\, y = z + \gamma$.

(b) A tangent plane to ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ intersects the coordinate axes in points A, B and C Prove that the centroid of $\Delta\, ABC$ is locus $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$.

OR

(b) Find the equation of the tangent planes to the conicoid $4x^2 - 5y^2 + 7z^2 + 13 = 0$ which are perpendicular to the line $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{20} = \frac{z-10}{21}$ and their points of contact.

(c) A normal at pt. $p(\alpha, \beta, \gamma)$ to the conic $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ intersects planes $x = 0, y = 0$ and $z = 0$ in points G_1, G_2 and G_3 respectively. Prove that $a \cdot pG_1 = b \cdot pG_2 = c \cdot pG_3$.