OCTOBER 2013 **U/ID 4733/JAE**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

PART A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. Define independent events.

   சார்பற்ற நிகழ்வுகள் – வரையறு.

2. If X and Y are independent random variables with means 10 and 20, variances 2 and 3 respectively, find the variance of $3X + 4Y$.

   X மற்றும் Y ஆகிய சார்பற்ற ரேண்டம் மாறிகளின் சராசரி மதிப்புகள் முறையே 10 மற்றும் 20, வர்க்க விலக்கங்கள் முறையே 2 மற்றும் 3 எனில், $3X + 4Y$ –ன் வர்க்கவிலக்கம் காண்க.

3. Write an equation involving random variables X and Y with correlation coefficient 1.

   ஒட்டுறவுக் கெழு 1 உள்ள சமவாய்ப்பு மாறிகள் X, Y ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ள சமன்பாடு எழுதுக.

4. Define cumulants.

   குவிப்பெருக்கத்தினை வரையறு.

5. Find the mean of uniform variate.

   சீரான மாறியின் சராசரியைக் காண்க.

6. Find $E(X)$ given $P(X = r) = q^r p$; $r = 0, 1, 2, \ldots$

   $P(X = r) = q^r p$; $r = 0, 1, 2, \ldots$ எனில் $E(X)$ ஐக் காண்க.

7. Define consistent estimator.

   ஒவ்வுமையுள்ள அளவையை வரையறு.

8. A random sample $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ of size 5 is drawn from a normal population with unknown mean μ. Verify that $T_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$ is an unbiased estimator of μ.

அளவு 5 கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ தெரியாத சராசரி μ உடைய நேர்மை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. எனில் $T_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$ என்பது μ-ன் பிறழ்ச்சியற்ற அளவையா எனச் சரிபார்க்கவும்.

9. Define power of the test.

சோதனைத் திறனை வரையறு.

10. Define critical region.

தீர்மானப் பகுதியை வரையறு.

PART B — (5 × 16 = 80 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 16 marks.

11. (a) State and prove addition theorem on expectation.

(b) Given : $f(x, y) = e^{-(x+y)}, 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$. Are X and Y independent?

Find :

(i) $P(X > 1)$

(ii) $P(X < Y/X < 2Y)$

(iii) $P(1 < X + Y < 2)$

(அ) எதிர்பார்ப்பு கூட்டல் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(ஆ) $f(x, y) = e^{-(x+y)}, 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$ என்க.

X மற்றும் Y ஒன்றையொன்று சாராதிருக்குமா?

(i) $P(X > 1)$

(ii) $P(X < Y/X < 2Y)$

(iii) $P(1 < X + Y < 2)$

ஆகியவற்றைக் காண்க.

Or

(c) Find the moments μ_2, μ_3, μ_4 of Binomial distribution.

(d) Let X and Y be two random variables having finite means. Prove that

(i) $E[\mathrm{Min}(X, Y)] \leq \mathrm{Min}\,[E(X), E(Y)]$

(ii) $E\,[\mathrm{Max}\,(X, Y)] \geq \mathrm{Max}\,[E(X), E(Y)]$.

(இ) ஈருறுப்புப் பரவலுக்கு μ_2, μ_3, μ_4 ஆகிய திருப்புத் திறன்களைக் காண்க.

(ஈ) X, Y ஆகியன முடிவுறு சராசரிகள் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறிகள் என்க. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $E[\text{Min}(X, Y)] \leq \text{Min}\,[E(X), E(Y)]$

(ii) $E\,[\text{Max}\,(X, Y)] \geq \text{Max}\,[E(X), E(Y)]$.

12. (a) For a distribution, the cumulants are given by : $K_r = n\{(r-1)!\}, n > 0$. Find the characteristics function.

(b) The joint pdf of two random variables X and Y is given by

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4a^2}\left[1 + xy\left(x^2 - y^2\right)\right], & |x| \leq a, |y| \leq a, a > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find the characteristics function of $Z = X + Y$.

(அ) ஒரு பரவலின் குவிப்பெருக்கங்கள் $K_r = n\{(r-1)!\}, n > 0$ எனில், சிறப்புச் சார்பு காண்க.

(ஆ) X, Y ஆகிய சமவாய்ப்பு மாறிகளில் இணை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4a^2}\left[1 + xy\left(x^2 - y^2\right)\right], & |x| \leq a, |y| \leq a, a > 0 \\ 0 & \text{பிறபகுதிகளில்} \end{cases}$$

எனில் $Z = X + Y$ ன் சிறப்புச் சார்பு காண்க.

Or

(c) Show that the correlation coefficient is independent of change of scale and origin.

(d) A symmetric die is thrown 600 times. Use Chebychev's inequality to find the lower bound for the probability of getting 80 to 120 sixes.

(இ) தொடர்புக் கெழு அலகு மற்றும் ஆதியையும் சாராதது எனக் காண்பி.

(ஈ) ஒரு சமச்சீரான பகடைக்காய் 600 முறை எறியப்படுகிறது. செபிச்செவ் சமனின்மையைப் பயன்படுத்தி, 80லிருந்து 120 முறை 6 பெறுவதற்கான நிகழ்தகவின் கீழ்வரம்பு காண்க.

13. (a) Find the mgf of Binomial distribution $B(n, p)$. Hence find the distribution of $X+Y$ given $X \sim B(n_1, p)$ and $Y \sim B(n_2, p)$ and X, Y are independent.

(b) If $X_1, X_2, \dots X_n$ are independent random variables, X_i having an exponential distribution with parameter $\theta_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ then show that $Z = \min(X_1, X_2, \dots X_n)$ has exponential distribution with parameter $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$.

(அ) ஈருறுப்புப் பரவல் $B(n, p)$ன் திருப்புத் திறன் உருவாக்கும் சார்பின் காண்க. $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, X, Y ஒன்றையொன்று சாராதவை எனில் $X + Y$ ன் பரவலைக் காண்க.

(ஆ) $X_1, X_2, \dots X_n$ ஆகியன ஒன்றையொன்று சாராத சமவாய்ப்பு மாறிகள் X_i என்பது $\theta_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ அளவுறு கொண்ட அடுக்குப் பரவல் எனில் $Z = \min(X_1, X_2, \dots X_n)$ என்பது $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$ கொண்ட அடுக்குப் பரவல் எனக் காண்க.

Or

(c) For the 2×2 table,

a	b
c	d

Prove that chi-square test of independence gives $\chi^2 = \dfrac{N(ad - bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$, $N = a + b + c + d$.

(d) Derive student's t-distribution.

(இ)

a	b
c	d

என்ற 2×2 அட்டவணைக்கு கைவர்க்க சாராதிருப்பதற்கான சோதனை $\chi^2 = \dfrac{N(ad - bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$, $N = a + b + c + d$ என நிறுவுக.

(ஈ) ஸ்டூடன்ட் t-பரவலினை தருவி.

14. (a) State and prove Rao-Cramer inequality.

(b) Obtain the MVB estimator for μ in a normal population $N(\mu, \sigma^2)$, where σ^2 is known.

(அ) ராவ்–கிராமர் சமனிலியை எழுதி நிறுவுக.

(ஆ) σ^2 தெரியும் எனக் கொண்டு $N(\mu, \sigma^2)$ என்ற இயல் பரவலின் MVB-ன் மதிப்பீட்டளவையைப் பெறுக.

Or

(c) Obtain the $100(1-\alpha)\%$ confidence intervals for the parameters

(i) θ and

(ii) σ^2 of the normal distribution

$$f(x, \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right\}, \ -\infty < x < \infty.$$

(d) Find the maximum likelihood estimate for the parameter λ of a Poisson distribution on the basis of a sample size n. Also find its variance.

(இ) $f(x, \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right\}, \ -\infty < x < \infty$ என்ற இயல்பரவலுக்கு

(i) θ மற்றும்

(ii) σ^2 ஆகியவற்றின் $100(1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

(ஈ) அளவுரு λ கொண்ட பாய்சான் பரவலிருந்து பெறப்பட்ட n அளவு கொண்ட கூறிற்கு λ ன் மீப்பெரு நிகழ்த்தக்க மதிப்பீட்டளவை காண்க. மேலும் இதன் திட்ட விலக்க வர்க்கம் காண்க.

15. (a) Given a random sample $x_1, x_2, \ldots, x_n$ from the distribution with p.d.f.

$f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0$

Show that there exists no ump test for testing $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 = \theta \neq \theta_0$.

(b) Let $X \sim N(\mu, 4), \mu$ unknown. To test $H_0 : \mu = -1$ against $H_1 : \mu = 1$ based on a sample of size 10 from this population, the critical region $x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} \geq 10$ is used. What is its size?

(அ) $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0$ என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு கொண்ட பரவலுடைய சமவாய்ப்புக் கூறு $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்க.

$H_0 : \theta = \theta_0$–ஐ $H_1 = \theta \neq \theta_0$–ற்றினை மாற்றாகக் கொண்ட சோதிக்க ump சோதனை இல்லை எனக் காண்பி.

(ஆ) $X \sim N(\mu, 4), \mu$ தெரியாதது என்க. இதன் இனத்தொகுதியில் பெறப்பட்ட அளவு 10 கொண்ட கூறினைக் கொண்டு, $H_0 : \mu = -1$ ஐ $H_1 : \mu = 1$ எதிராகச் சோதிக்க $x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} \geq 10$ என்ற தீர்மானப் பகுதி பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதன் அளவு என்ன?

Or

(c) Let X have a p.d.f of the form :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}; & 0 < x < \infty, \theta > 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

To test $H_0 : \theta = 2$ against $H_1 : \theta = 1$, the random sample $x_1\ x_2$ of size 2 is used. Define the critical region : $W = \{(x_1, x_2) : 9.5 \leq x_1 + x_2\}$.

Find :

(i) Power of the test

(ii) Significance level of the test.

(d) Explain the test for the mean of a normal population.

(இ) $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}; & 0 < x < \infty, \theta > 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$ என்பது X ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்க. $H_0 : \theta = 2$ ஐ $H_1 : \theta = 1$ எதிராக சோதிக்க அளவு 2 கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $x_1\ x_2$ பயன்படுகிறது. வரையறுக்கப்பட்ட தீர்மானப் பகுதி $W = \{(x_1, x_2) : 9.5 \leq x_1 + x_2\}$ எனில்

(i) சோதனைத் திறன்

(ii) சோதனையின் சிறப்பு அளவு

ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ஈ) இயல் இனத்தொகுதியின் சராசரியை சோதிக்கும் சோதனையை விளக்குக.