OCTOBER 2011 **U/ID 4733/JAE**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

PART A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

Each questions carries 2 marks.

1. Show that the probability of impossible event is zero.

   சாத்தியமற்ற நிகழ்வின் நிகழ்தகவு பூச்சியம் எனக் காண்பி.

2. Given that $f(x) = k\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $(x = 0,1,2,3)$, is a probability distribution of the random variable X. Find the value of k.

   ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல் $f(x) = k\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $(x = 0,1,2,3)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, எனில் k -ன் மதிப்பு காண்க.

3. Define moment.

   விலக்கு வரையறு.

4. Find the value of $r(X, Y)$ if X and Y are independent random variables.

   X , Y ஆகியன சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள் எனில் $r(X, Y)$ ன் மதிப்பு காண்க.

5. Find the mgf of the uniform distribution.

சீரான பரவலின் mgf ஐக் காண்க.

6. Given X is a Poisson variate with $E(X^2) = 6$. Find $E(X)$.

X-ஒரு பாய்ஸான் மாறி மற்றும் $E(X^2) = 6$ எனில் $E(X)$ ஐக் காண்க.

7. Define unbiased estimator.

பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீட்டு அளவையை வரையறு.

8. Define Likelihood function.

நிகழத்தக்க சார்பை வரையறு.

9. State Neyman-Pearson lemma.

நெமன்-பியர்சன் தேற்றத்தை எழுதுக.

10. Define Type I and Type II errors.

முதல் வகை மற்றும் இரண்டாம் வகைப் பிழைகளை வரையறு.

PART B — ($5 \times 16 = 80$ marks)

Answer ALL questions.

Each questions carries 16 marks.

11. (a) State and prove Bayes theorem. The contents of urns I, II and III are as follows :

1 white, 2 black and 3 red balls,

2 white, 1 black and 1 red balls, and

4 white, 5 black and 3 red balls.

One urn is chosen at random and two balls drawn from it. They happen to be white and red. What is the probability that they come from urns I, II or III?

(b) Find the mgf of Binomial distribution.

(அ) பேய்ஸின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

கலன் I, II மற்றும் IIIல் உள்ள பொருட்கள் பின்வருமாறு.

1 வெள்ளை, 2 கருப்பு மற்றும் 3 சிகப்பு பந்துகள்,

2 வெள்ளை, 1 கருப்பு மற்றும் 1 சிகப்பு பந்துகள், மற்றும்

4 வெள்ளை, 5 கருப்பு மற்றும் 3 சிகப்பு பந்துகள்.

சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு கலனிலிருந்து இரு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை வெள்ளை மற்றும் சிகப்பு பந்தாக கலன் I, II அல்லது III லிருந்து வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ஆ) ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு காண்க.

Or

(c) State and prove the multiplication theorem on expectation.

(d) If t is any positive real number, show that the function defined by $p(x) = e^{-t}\left(1 - e^{-t}\right)^{x-1}$ can represent a probability function of a random variable X assuming the values $1, 2, 3\cdots$. Find $E(X)$ and $\text{var}(X)$ of the distribution.

(இ) எதிர்ப்பார்த்தலின் பெருக்கல் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(ஈ) t ஒரு மிகை மெய்யெண் எனில் $p(x) = e^{-t}\left(1 - e^{-t}\right)^{x-1}$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு $1, 2, 3\cdots$ ஆகிய மதிப்புகளை கொண்டுள்ள சமவாய்ப்பு மாறி X ன் நிகழ்தகவு சார்பாக இருக்கும் எனக் காண்பி. இப்பரவலின் $E(X)$ மற்றும் $\text{var}(X)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

12. (a) If X is a random variable with characteristic function $\phi_X(t)$, and if $\mu'_r = E\left(X^r\right)$ exists then show that

$$\mu'_r = (-i)^r \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r}^{\phi(t)} \right|_{t=0}$$

(b) Find the density function $f(x)$ corresponding to the characteristic function

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - |t| \ , & |t| \le 1 \\ 0 \ , & |t| > 1 \end{cases}$$

(அ) $\phi_X(t)$, என்பது X எனும் சமவாய்ப்பு மாறியின் சிறப்புச் சார்பு மற்றும் $\mu'_r = E(X^r)$ எனில்

$$\mu'_r = (-i)^r \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} \phi(t) \right|_{t=0}$$ எனக் காண்பி.

(ஆ) $\phi(t) = \begin{cases} 1-|t| \ , \ |t| \le 1 \\ 0 \ , \ |t| > 1 \end{cases}$

என்ற சிறப்புச் சார்பு கொண்ட அடர்த்திச் சார்பினை காண்க.

Or

(c) Find the limits of correlation coefficient.

(d) State and prove Chebychev's inequality.

(இ) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லைகளைக் காண்க.

(ஈ) செபிசெவ் சமனிலையை எழுதி நிறுவுக.

13. (a) If X has an exponential distribution, then show that for every constant $a \ge 0$,

$P(Y \le x / X \ge a) = P(X \le x)$, where $Y = X - a$.

(b) Derive Poisson distribution as a limiting case of Binomial distribution.

(அ) X என்பது அடுக்கைப் பரவல் கொண்டுள்ளது எனில் , ஒவ்வொரு மாறி $a \ge 0$ -ற்கும்,

$P(Y \le x / X \ge a) = P(X \le x)$, ($Y = X - a$ எனில்)

எனக் காண்பி.

(ஆ) பாய்சன் பரவலை ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லைநிலை வகைப்பாக தருவி.

Or

(c) In a normal distribution, find the recurrence relation for the even order moments about mean. Also, show that the odd order moments about mean are zero.

(d) Derive Chi-square distribution.

(இ) இயல்பரவலின் சராசரியைப் பொறுத்து இரட்டை வரிசை விலக்குகளுக்கான மீள்வரவு உறவைக் காண்க. மேலும் சரசாரியைப் பொறுத்து ஒற்றைவரிசை விலக்குகள் பூச்சியம் எனக் காண்பி.

(ஈ) கை-வர்க்கப் பரவலை தருவி.

14. (a) If $X_1, X_2, \cdots, X_n$ are random observations on a Bernoullic variate X taking the value 1 with probability p and the value 0 with probability $(1-p)$, show that

$\frac{\Sigma x_i}{n}\left(1-\frac{\Sigma x_i}{n}\right)$ is a consistent estimate of $p(1-p)$.

(b) Let $x_1, x_2, \cdots, x_n$ be a random sample from $N(\mu, \sigma^2)$ population. Find sufficient estimators for μ and σ^2.

(அ) ஒரு ஈருறுப்பு மாறி X ன் வாய்ப்பு கண்டறிபதிவுகள் $X_1, X_2, \cdots, X_n$ இவை மதிப்பு 1-ஐ நிகழ்தகவு p உடனும் மதிப்பு 0-ஐ நிகழ்தகவு $(1-p)$ உடனும் எடுக்கின்றன. எனில் $\frac{\Sigma x_i}{n}\left(1-\frac{\Sigma x_i}{n}\right)$ என்பது $p(1-p)$ ன் ஒவ்வுமையுள்ளஅளவுரு எனக் காட்டுக.

(ஆ) $N(\mu, \sigma^2)$ இனத் தொகுதியின் வாய்ப்புக் கூறு $x_1, x_2, \cdots, x_n$ எனில் μ மற்றும் σ^2 ஆகியவற்றின் போதுமான மதிப்பீட்டளவையைக் காண்க.

Or

(c) Let $x_1, x_2, \cdots x_n$ be a random sample from a uniform population on $[0, \theta]$. Find a sufficient estimator for θ.

(d) Show that $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ in a random sampling from $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), & 0 < x < \infty \\ 0 , & otherwise \end{cases}$

Where $0 < \theta < \infty$, is an MVB estimator of θ and has variance $\frac{\theta^2}{n}$.

(இ) $[0, \theta]$ல் சீரான இனத்தொகுதியின் வாய்ப்புக் கூறு $x_1, x_2, \cdots x_n$ எனில் θ ன் போதுமான மதிப்பீட்டளவையைக் காண்க.

(ஈ) $0 < \theta < \infty$ எனில்

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{மற்றவைகளில்} \end{cases}$$

θ -லிருந்து பெற்றப்பட்ட வாய்ப்புகளுக்கு $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ என்பது ஒரு MVB மதிப்பீட்டளவை எனக் காண்பி. இதன் மாறுபாட்டளவை $\frac{\theta^2}{n}$ எனக் காண்பி.

15. (a) Show that for n attributes $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$(A_1, A_2, A_3 \cdots A_n) \geq (A_1) + (A_2) + (A_3) + \cdots, (A_n) - (n-1)\, N$$

where N is the total number of observations.

(b) 800 candidates of both sexes appeared at an examination. The boys outnumbered the girls by 15% of the total. The number of candidates who passed exceed the number failed by 480. Equal number of boys and girls failed in the examination. Prepare a 2×2 table and find the coefficient of association.

(அ) மொத்த பதிவுகளின் எண்ணிக்கை N மற்றும் $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ஆகியன n பண்புகள் எனக் கொண்டு

$$(A_1, A_2, A_3 \cdots A_n) \geq (A_1) + (A_2) + (A_3) + \cdots, (A_n) - (n-1) N$$

எனக் காண்பி.

(ஆ) ஒரு தேர்வில் இருபாலினத்திலிருந்து 800 நபர்கள் பங்கு பெற்றனர். ஆண்கள் பெண்களை விட மொத்தத்தில் 15% அதிகமாக இருந்தனர். தேர்ச்சியுற்றோரின் எண்ணிக்கை தோல்வியடைந்தோரை விட 480 அதிகம். ஆண்களும் பெண்களும் சம எண்ணிக்கையில் தோல்வி அடைந்தனர். இதிலிருந்து 2 ×2 தேர்வுப் பட்டியல் தயாரித்து இணைப்புக் கெழுவைக் காண்க.

Or

(c) Let p be the probability that a coin will fall head in a single toss in order to test $H_0 : p = \frac{1}{2}$ against $H_1 : p = \frac{3}{4}$. The coin is tossed 5 times and H_0 is rejected if more than 3 heads are obtained. Find the probability of type I error and power of the test.

(d) Examine whether a best critical region exist for testing the null hypothesis $H_0 : \theta = \theta_0$ against the alternative hypothesis $H_1 : \theta > \theta_0$ for the parameter θ of the distribution $f(x, \theta) = \frac{1+\theta}{(x+\theta)^2}$, $1 \leq x < \infty$.

(இ) $H_0 : p = \frac{1}{2}$ என்பதை $H_1 : p = \frac{3}{4}$ -ற்கு எதிராக சோதிக்க ஒரு நாணயம் சுண்டப்படும்போது தலை விழ நிகழ்தகவு p என்க. நாணயம் 5 முறை சுண்டப்பட்டு 3-ற்கு மேலே தலைவிழுந்தால் H_0 நிராகரிக்கபடுகிறது. வகை I பிழைக்கான நிகழ்தகவு மற்றும் சோதனைத்திறன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ஈ) θ -வை அளவுருவாகக் கொண்டுள்ள

$$f(x, \theta) = \frac{1+\theta}{(x+\theta)^2}, \; 1 \le x < \infty$$

என்ற பரவலுக்கு $H_0 : \theta = \theta_0$ என்ற இன்மை எடுகோளை $H_1 : \theta > \theta_0$ என்ற மாற்று எடுகோளை சோதிக்க சிறந்த தீர்மானப் பகுதி உள்ளதா எனப் பார்க்க.
