

**Mathematics**

**2006 April**

**Science 2nd PUC (12th)**

**University Exam**

**Department of Pre-University**

**Education Karnataka (PUE Board)**

shaalaa.com

Code No. **35-NS**

ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ (೨೦೦೫-೨೦೦೬ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ)  
New Scheme ( For Students studied during the Year 2005-2006 )

Total No. of Questions : 38 ]

[ Total No. of Printed Pages : 15

March / April, 2006

## MATHEMATICS

( Kannada and English Versions )

( New Syllabus )

Time : 3 Hours ]

[ Max. Marks : 90

( Kannada Version )

- ಸೂಚನೆ: i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ A, B, C ಮತ್ತು D ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - A ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - B ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - C ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - D ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1.  $6x \equiv 3 \pmod{15}$  ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಎಷ್ಟು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ ?

2.  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & x \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  ಮಾತೃಕೆಗೆ ವಿಲೋಮ ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ  $x$  ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

[ Turn over

Visit [www.shaalaa.com](http://www.shaalaa.com) for more question papers.

3. ಗುಣಾಕಾರದ ಮಾದ್ಯುಲೋ 5 ರ ಸಮುದಾಯ  $G = \{ 1, 2, 3, 4 \}$  ರಲ್ಲಿ  $(3 \times 4^{-1})^{-1}$  ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?
4.  $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$  ಮತ್ತು  $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$  ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಾಗ  $\lambda$  ದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?
5.  $4x^2 + 4y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$  ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6.  $y^2 = 8x$  ಪರವಲಯಕ್ಕೆ  $x + y + 2 = 0$  ಸರಳರೇಖೆ ಸ್ಪರ್ಶವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7.  $\sec^{-1}(-2)$  ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?
8.  $\frac{(1+i)^2}{3-i}$  ನ್ನು  $x + iy$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
9.  $y = a^{4 \log_a x}$  ಅನ್ನು  $x$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ.
10.  $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 2 = 20

11.  $a/b$  ಮತ್ತು  $a/c$  ಆವಾಗ  $a/b + c$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12.  $3x + 2y = 8$

$4x - 3y = 5$  ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರೇಮರ್ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ ಬಿಡಿಸಿ.

13. ಸಂಕಲನದ ಮಾದ್ಯಲೊ 6 ರ ಪ್ರಕಾರ  $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  ಒಂದು ಸಮುದಾಯವಾಗಿದ್ದು,  $H = \{0, 3\}$  ಯು ಕೊಟ್ಟ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ  $G$  ನ ಉಪಸಮುದಾಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14.  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  ಮತ್ತು  $\vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಪುಟಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15.  $2x^2 + 2y^2 - 18x + 6y - 7 = 0$  ಮತ್ತು  $3x^2 + 3y^2 + 4x + ky + 3 = 0$  ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದ್ದರೆ,  $k$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉಪಪ್ರಧಾನ ಅಕ್ಷವು ಅದರ ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸಮ ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ Turn over

17. ಬಿಡಿ :  $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

18.  $\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19.  $y = x^{\cos^{-1}x}$  ನ್ನು  $x$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ.

20.  $y = \sin x(1 + \cos x)$  ಇದರ ಬೆಲೆಯು  $x = \frac{\pi}{3}$  ಆದಾಗ, ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22.  $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} = k \frac{d^2y}{dx^2}$  ನ ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

23. a) 432 ರ ಒಟ್ಟು ಭಸ್ಮಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3

b)  $71 \times 73 \times 75$  ನ್ನು 23 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು ?

2

24.  $\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ac & bc & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5

25.  $\mathcal{O}^+$  ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಮೇಯಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ,  $(\mathcal{O}^+, *)$  ಒಂದು ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಮುದಾಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. \* ಕ್ರಿಯೆಯು  $a * b = \frac{2ab}{3}$  ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ. 5

26. a)  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  ಮತ್ತು

$\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$  ಆಗಿದ್ದರೆ,  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  ಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕಮಾನ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  ಗಳು  $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$  ನ ದಿಶಾ ಕೋಷ್ಟನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

$2 \times 5 = 10$

27. a)  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ  $(x_1, y_1)$  ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $x + y = 6$  ಮತ್ತು  $x + 2y = 4$  ಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಏಕಮಾನಗಳಾದಾಗ ಆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

8. a)  $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$  ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ನಿಯತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $9x^2 - 4y^2 = 36$  ಅತಿಪರವಲಯದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ (Asymptotes) ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

[ Turn over

29. a)  $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$  ಆದಾಗ,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b)  $\tan 3x \cdot \tan 2x = 1$  ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

30. a)  $x$  ನ್ನು ಕುರಿತು  $\sin^2 x$  ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವಗಳಿಂಫ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $y = x^{x^{x^{\dots}}}$  ಆದಾಗ,  $\frac{dy}{dx}$  ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. a)  $y = (\sinh^{-1} x)^2$  ಆದಾಗ,  
 $(1 + x^2) y_2 + x y_1 - 2 = 0$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b)  $x = a (\theta + \sin \theta)$  ಮತ್ತು  $y = a (1 - \cos \theta)$  ಆದಾಗ,

$\frac{dy}{dx} = \tan \frac{\theta}{2}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

32. a)  $2y = x^3 + 5x$  ಮತ್ತು  $y = x^2 + 2x + 1$  ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ (1, 3) ರಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $\int e^x \left( \frac{1+x}{(2+x)^2} \right) dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :  $\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$  3

b)  $\int 4x^3 \cdot x^2 dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34.  $x^2 = y$  ಮತ್ತು  $y = x + 2$  ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

### ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :  $2 \times 10 = 20$

35. a) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) ಕ್ಯಾಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ಮಾತೃಕೆಗೆ ಅದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ. 4

36. a)  $-1 + i\sqrt{3}$  ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚತುರ್ಥಾಂತ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. 6

b)  $[\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

[ Turn over



37. a) ಮೇಲ್ಮುಖ ಪಾದದ 12 ಸೆ.ಮೀ. ಅಳ ಮತ್ತು 9 ಸೆ.ಮೀ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಇರುವ ಶಂಖ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು  $1\frac{1}{2}$  ಘನ ಸೆ.ಮೀ. / ಸೆಕೆಂಡ್‌ನಂತೆ ಸುರಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. 4 ಸೆ.ಮೀ. ವರೆಗೆ ಪಾತ್ರ ತುಂಬಿದಾಗ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ ಮತ್ತು ನೀರಿನ ಸಮತಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6

b)  $\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta = 1$  ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

38. a)  $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6

b) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$(y^2 + y) dx + (x^2 + x) dy = 0.$$

4

( English Version )

- Instructions : i) The question paper has four Parts - A, B, C and D. Answer all the parts.
- ii) Part - A carries 10 marks, Part - B carries 20 marks, Part - C carries 40 marks and Part - D carries 20 marks.

## PART - A

Answer all the ten questions :

 $10 \times 1 = 10$ 

- Find the number of incongruent solutions for  $6x \equiv 3 \pmod{15}$ .
- If the matrix  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & x \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  has no inverse, find  $x$ .
- In a group  $G = \{ 1, 2, 3, 4 \}$  under multiplication modulo 5 find  $(3 \times 4^{-1})^{-1}$ .
- If the vectors  $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$  and  $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$  are perpendicular, find  $\lambda$ .
- Find the centre of the circle  $4x^2 + 4y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ .
- If the line  $x + y + 2 = 0$  touches the parabola  $y^2 = 8x$ , find the point of contact.

[ Turn over

7. Find the value of  $\sec^{-1}(-2)$ .
8. Express  $\frac{(1+i)^2}{3-i}$  in  $x+iy$  form.
9. Differentiate  $y = a^{4 \log_a x}$  w.r.t.  $x$ .
10. Evaluate :  $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$ .

**PART - B**

Answer any ten questions :

 $10 \times 2 = 20$ 

11. If  $a/b$  and  $a/c$  then prove that  $a/b + c$ .
12. Solve by Cramer's Rule :

$$3x + 2y = 8$$

$$4x - 3y = 5.$$

13. Prove that  $H = \{0, 3\}$  is a sub-group of the group  $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

under addition modulo 6.

14. Find the volume of the parallelepiped whose coterminous edges are

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \text{ and } \vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}.$$

15. Find  $k$  for which the circles  $2x^2 + 2y^2 - 18x + 6y - 7 = 0$  and

$3x^2 + 3y^2 + 4x + ky + 3 = 0$  intersect orthogonally.

16. Find the eccentricity of the ellipse if its minor axis is equal to distance between foci.

17. Solve :  $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

18. Show that  $\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$

19. Differentiate  $y = x^{\cos^{-1}x}$  w.r.t.  $x$ .

20. Show that  $y = \sin x(1 + \cos x)$  is maximum when  $x = \frac{\pi}{3}$ .

21. Evaluate :  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$ .

22. Find the order and degree of the differential equation,

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} = k \frac{d^2y}{dx^2}$$

### PART - C

I. Answer any *three* questions :

$3 \times 5 = 15$

23. a) Find the number of all positive divisors and the sum of all such positive divisors of 432. 3

b) Find the remainder when  $71 \times 73 \times 75$  is divided by 23. 2

{ Turn over

24. Prove that 
$$\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ac & bc & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$
 5

25. If  $Q^+$  is the set of all positive rationals, prove that  $(Q^+, *)$  is an Abelian group, where  $*$  is defined by  $a * b = \frac{2ab}{3}$ . 5

26. a) If  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  and

$\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ , find the unit vector in the direction of  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ . 3

b) If  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  and  $\cos \gamma$  are direction cosines of the vector  $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ , show that  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . 2

II. Answer any two questions :

2 × 5 = 10

27. a) Find the equation of tangent to the circle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ at the point } (x_1, y_1) \text{ on it. } 3$$

b) Find the equation of the circle two of whose diameters are  $x + y = 6$  and  $x + 2y = 4$  and whose radius is 10 units. 2

28. a) Find the eccentricity and equations to directrices of the ellipse  $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ . 3

b) Find the equations of the asymptotes of the hyperbola

$$9x^2 - 4y^2 = 36. \text{ Also find the angle between them. } 2$$

29. a) If  $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ , prove that

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1. \quad 3$$

b) Find the general solution of  $\tan 3x \cdot \tan 2x = 1$ . 2

Answer any three of the following questions : 3 × 5 = 15

30. a) Differentiate  $\sin^2 x$  w.r.t.  $x$  from first principles. 3

b) If  $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$  find  $\frac{dy}{dx}$ . 2

31. a) If  $y = (\sinh^{-1} x)^2$ , prove that

$$(1 + x^2) y_2 + xy_1 - 2 = 0. \quad 3$$

b) If  $x = a(\theta + \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$ , prove that

$$\frac{dy}{dx} = \tan \frac{\theta}{2}. \quad 2$$

32. a) Show that the curves  $2y = x^3 + 5x$  and  $y = x^2 + 2x + 1$

touch each other at  $(1, 3)$ . Find the equation to common tangent. 3

b) Evaluate :  $\int e^x \left( \frac{1+x}{(2+x)^2} \right) dx$ . 2

[ Turn over

33. a) Evaluate :  $\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx.$  3

b) Evaluate :  $\int 4x^3 \cdot x^2 dx.$  2

34. Find the area bounded between the curves  $x^2 = y$  and  $y = x + 2.$

5

**PART - D**

Answer any two of the following questions :

2 × 10 = 20

35. a) Define ellipse and derive standard equation to the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

6

b) State Cayley-Hamilton theorem. Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$  4

36. a) Find the fourth roots of the complex number  $-1 + i\sqrt{3}$  and represent them in an Argand diagram. 6

b) Prove that  $[\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^2.$  4

37. a) An inverted circular cone has depth 12 cms and base radius 9 cms. Water is poured into it at the rate of  $1\frac{1}{2}$  c.c./sec. Find the rate of rise of water level and the rate of increase of the surface area when depth of water is 4 cm. 6
- b) Find the general solution of  $\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta = 1$ . 4
38. a) Prove that  $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ . 6
- b) Solve the differential equation  $(y^2 + y) dx + (x^2 + x) dy = 0$ . 4
- 
-