

This question paper consists of 36 questions [Section-A (27) + Section-B (3+3+3)] and 8 printed pages.

इस प्रश्न-पत्र में 36 प्रश्न [खण्ड-अ (27) + खण्ड-ब (3+3+3)] तथा 8 मुद्रित पृष्ठ हैं।

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

अनुक्रमांक

Code No. **34/ISS/2**
कोड नं०

MATHEMATICS
गणित
(311)

Set/सेट **A**

1018

Day and Date of Examination

(परीक्षा का दिन व दिनांक)

Signature of Invigilators 1.

(निरीक्षकों के हस्ताक्षर)

2.

General Instructions :

1. Candidate must write his/her Roll Number on the first page of the question paper.
2. Please check the question paper to verify that the total pages and total number of questions contained in the booklet are the same as those printed on the top of the first page. Also check to see that the questions are in sequential order.
3. Making any identification mark in the answer-book or writing roll number anywhere other than the specified places will lead to disqualification of the candidate.
4. Write your Question Booklet Code No. 34/ISS/2, Set **A** on the answer-book.
5. (a) The question paper is in English/Hindi medium only. However, if you wish, you can answer in any one of the languages listed below :
English, Hindi, Urdu, Punjabi, Bengali, Tamil, Malayalam, Kannada, Telugu, Marathi, Oriya, Gujarati, Konkani, Manipuri, Assamese, Nepali, Kashmiri, Sanskrit and Sindhi.
You are required to indicate the language you have chosen to answer in the box provided in the answer-book.
(b) If you choose to write the answer in the language other than Hindi and English, the responsibility for any errors/mistakes in understanding the question will be yours only.

सामान्य अनुदेश :

1. परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र के पहले पृष्ठ पर अपना अनुक्रमांक अवश्य लिखें।
2. कृपया प्रश्न-पत्र को जाँच लें कि पुस्तिका के कुल पृष्ठों तथा प्रश्नों की उतनी ही संख्या है जितनी प्रथम पृष्ठ के सबसे ऊपर छपी है। इस बात की जाँच भी कर लें कि प्रश्न क्रमिक रूप में हैं।
3. उत्तर-पुस्तिका में पहचान-चिह्न बनाने अथवा निर्दिष्ट स्थानों के अतिरिक्त कहीं भी अनुक्रमांक लिखने पर परीक्षार्थी को अयोग्य ठहराया जायेगा।
4. अपनी उत्तर-पुस्तिका पर प्रश्न-पुस्तिका की कोड संख्या 34/ISS/2, सेट **A** लिखें।
5. (क) प्रश्न-पत्र केवल हिन्दी/अंग्रेजी में है। फिर भी, यदि आप चाहें तो नीचे दी गई किसी एक भाषा में उत्तर दे सकते हैं :
अंग्रेजी, हिन्दी, उर्दू, पंजाबी, बंगला, तमिल, मलयालम, कन्नड़, तेलुगू, मराठी, उडिया, गुजराती, कोंकणी, मणिपुरी, असमिया, नेपाली, कश्मीरी, संस्कृत और सिन्धी।
कृपया उत्तर-पुस्तिका में दिए गए बॉक्स में लिखें कि आप किस भाषा में उत्तर लिख रहे हैं।
(ख) यदि आप हिन्दी एवं अंग्रेजी के अतिरिक्त किसी अन्य भाषा में उत्तर लिखते हैं तो प्रश्न को समझने में होने वाली त्रुटियों/गलतियों की जिम्मेदारी केवल आपकी होगी।

MATHEMATICS

गणित

(311)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे]

[पूर्णांक : 100

- Note : (i) This Question Paper consists of *two* Sections, viz., 'A' and 'B'.
(ii) All questions from Section 'A' are to be attempted.
(iii) Section 'B' has got more than one option. Candidates are required to attempt questions from *one option* only.

- निर्देश : (i) इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड हैं—खण्ड 'अ' एवं खण्ड 'ब'।
(ii) खण्ड 'अ' के सभी प्रश्नों को हल करना है।
(iii) खण्ड 'ब' में एक से अधिक विकल्प हैं। परीक्षार्थियों को केवल एक विकल्प के ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

SECTION-A

खण्ड-अ

1. Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$(2n)! = 2^n \cdot n! [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]$$

2

2. Using the properties of determinants, prove the following

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$$

where $1, \omega, \omega^2$ are the cube roots of unity.

2

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$$

जहाँ $1, \omega, \omega^2$ एक के घनमूल हैं।

3. Evaluate :

2

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{2x^2} \right)$$

4. Write $-5 - 5i$ in the polar form.

2

$-5 - 5i$ को ध्रुवीय रूप (polar form) में लिखिए।

5. Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$(\sec \theta + \tan \theta)^2 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

2

6. Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$\sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

2

7. Find if the function $f(x) = (6 \sin^2 x + 5 \cos x - 3x^2)$ is even or odd.

2

फलन $f(x) = (6 \sin^2 x + 5 \cos x - 3x^2)$ सम फलन है या विषम फलन, ज्ञात कीजिए।

8. Suppose you want to arrange your English, Hindi, Mathematics, History, Geography and Science books on a shelf. In how many ways can you do it?

2

माना आप अपनी अंग्रेजी, हिन्दी, गणित, इतिहास, भूगोल तथा विज्ञान की पुस्तकें एक अलमारी में सजाना चाहते हैं। यह आप कितने प्रकार से कर सकते हैं?

9. Evaluate :

3

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

10. Find the sum to n terms of the following series :

3

निम्न अनुक्रम के n पदों का योग ज्ञात कीजिए :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

11. Show that the points $P(2a, 3a)$, $Q(2a, 5a)$, $R(0, 4a)$ are the vertices of an isosceles triangle whose equal sides are $\sqrt{5}a$ and base is $2a$.

3

दर्शाइए कि बिन्दु $P(2a, 3a)$, $Q(2a, 5a)$ तथा $R(0, 4a)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं, जिसकी समान भुजाओं की लम्बाई $\sqrt{5}a$ तथा आधार की लम्बाई $2a$ है।

12. If 1, ω and ω^2 are the cube roots of unity, prove the following : 3

यदि 1, ω तथा ω^2 एक के घनमूल हैं, तो निम्न सिद्ध कीजिए :

$$(1 - \omega + \omega^2)^7 + (1 + \omega - \omega^2)^7 = 128$$

13. If $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$, find $\frac{dy}{dx}$. 3

यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

14. Show that a closed right circular cylinder of given surface has maximum volume if its height equals the diameter of the base. 3

दर्शाइए कि एक बंद लम्ब वृत्तीय शंकु, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल दिया है, का घनफल अधिकतम होगा, यदि उसकी ऊँचाई आधार के व्यास के समान है।

15. Find the equation of the circle which passes through the points (1, 0), (0, -6) and (3, 4). 3

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, 0), (0, -6) तथा (3, 4) से होकर जाता है।

16. If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, verify that $A^2 - 5A + 7I = 0$. 3

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ ।

17. Find the differential equation of the family of curves $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, where A and B are arbitrary constants. 4

वक्र कुल $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, जहाँ A तथा B स्वेच्छ अचर हैं, का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

18. Find the intervals in which the function $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 117$ is (a) increasing, (b) decreasing. 4

फलन $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 117$ के लिए वह अन्तराल ज्ञात कीजिए, जिसमें फलन (क) वर्धमान है, (ख) हासमान है।

19. Find the equation of tangent to the ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ on the point $\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3}\right)$. 4

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ के बिन्दु $\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3}\right)$ पर स्पर्शरेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

20. Solve the following trigonometric equation and find its general solutions : 4

निम्न त्रिकोणमितीय समीकरण के लिए व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

21. If $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ are binomial coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ prove that

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = 2^n \quad 4$$

यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ द्विपद गुणांक हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = 2^n$$

22. Using matrices, solve the following system of equations : 5

आव्यूहों का प्रयोग करके निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + y - z = 3$$

$$2x + 3y + z = 10$$

$$3x - y - 7z = 1$$

23. Find the square root of $5+12i$. 5

$5+12i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

24. Find $\int_0^1 (x^2 + 3x) dx$ as limit of sums. 5

$\int_0^1 (x^2 + 3x) dx$ का मान योगों की गुच्छमान विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

25. If $y = \sqrt{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}$, find $\frac{dy}{dx}$. 5

यदि $y = \sqrt{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

26. If $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$, show that

$$x = y - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} - \frac{y^4}{4!} + \dots \quad 5$$

यदि $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$, तो दिखाइए कि $x = y - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} - \frac{y^4}{4!} + \dots$

27. Find the area bounded by $x^2 = 4y$ and $x = 4y - 2$. 5

$x^2 = 4y$ तथा $x = 4y - 2$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

SECTION-B

खण्ड-ब

OPTION-I

विकल्प-I

(Statistics and Probability)

(सांख्यिकी तथा प्रायिकता)

28. Find the probability of getting both red balls, when from a bag containing 5 red and 4 black balls, two balls are drawn without replacement. 3

एक थैले, जिसमें 5 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं, में से दो लाल गेंदें, एक के बाद एक प्रविस्थापना बिना, निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

29. Find the mean and standard deviation for the following data : 3

निम्न आँकड़ों के लिये माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

Class : 30-35 35-40 40-45 45-50 50-55 55-60 60-65 65-70
(वर्ग)

Frequency : 2 3 8 12 16 5 2 2
(बारबारता)

30. Determine the binomial distribution whose mean is 3 and variance is $\frac{9}{4}$. 4

वह द्विपद बंटन ज्ञात कीजिए जिसका माध्य 3 है तथा प्रसरण $\frac{9}{4}$ है।

OPTION-II

विकल्प-II

(Linear Programming)

(रैखिक प्रोग्रामन)

28. Four persons A, B, C and D are to be assigned four jobs I, II, III and IV. The cost matrix is given below. Find the proper assignment :

3

चार व्यक्तियों A, B, C तथा D को चार कार्य I, II, III तथा IV आवंटित करना है। संबंधित मूल्य आव्यूह निम्न है। उचित नियतन ज्ञात कीजिए :

Man (व्यक्ति)→		A	B	C	D
Job ↓ (कार्य)	I	8	10	17	9
	II	3	8	5	6
	III	10	12	11	9
	IV	6	13	9	7

29. Find the dual of the following problem :

3

Minimize $Z = 16x_1 + 9x_2 + 21x_3$
subject to constraints

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 16$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

निम्न समस्या का द्वैत ज्ञात कीजिए :

$$\text{न्यूनतम } Z = 16x_1 + 9x_2 + 21x_3$$

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 16$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

30. Solve the following Linear Programming Problem graphically :

4

Maximize $Z = 2x_1 + 3x_2$
subject to constraints

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$2x_1 + x_2 \leq 600$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को ग्राफ की सहायता से हल कीजिए :

$$\text{अधिकतम } Z = 2x_1 + 3x_2$$

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$2x_1 + x_2 \leq 600$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

OPTION-III

विकल्प-III

(Vectors and 3-D Geometry)

(सदिश तथा त्रि-आयाम ज्यामिति)

28. Find the equation of the line passing through the point (3, 1, -5) and parallel to the line

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$$

3

उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 1, -5) से होकर जाती है तथा रेखा $\frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ के समान्तर है।

29. Find the value of λ so that the vectors $\vec{a} = \lambda\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$ are perpendicular to each other.

3

λ का मान ज्ञात कीजिए कि सदिश $\vec{a} = \lambda\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$ लम्बवत् हैं।

30. Find the equation of the sphere passing through the points (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) and (0, 0, 1).

4

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) तथा (0, 0, 1) से होकर जाता है।
